MECHANIKA PŁYNÓW

MATERIAŁY POMOCNICZE DO WYKŁADU

Dr hab. inż. Cezary Orlikowski

MECHANIKA PŁYNÓW

Wiadomości wstępne

PŁYNY

CIECZE



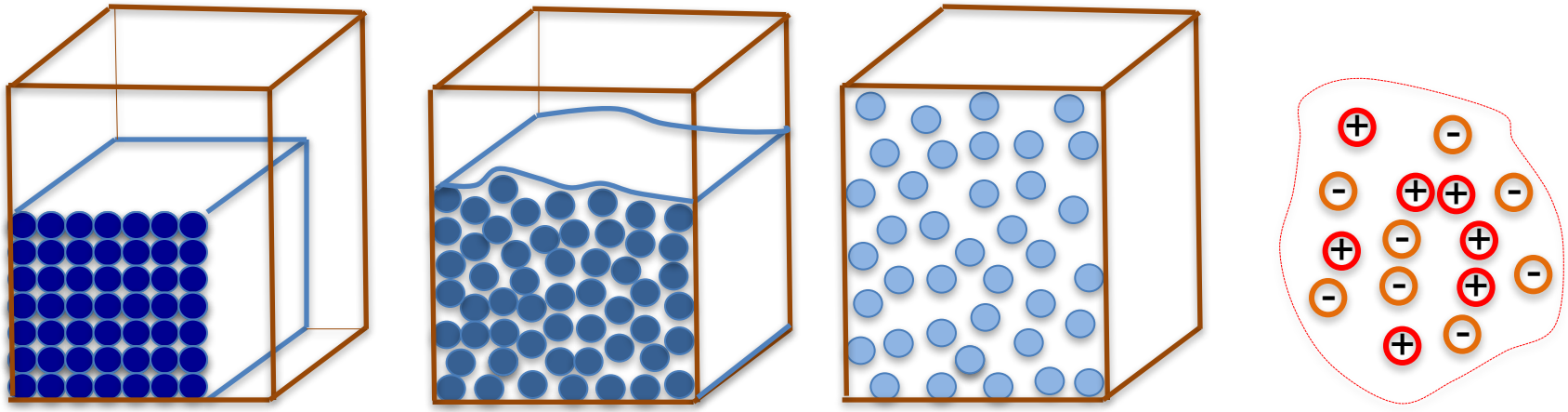
GAZY



CZTERY STANY SKUPIENIA MATERII

Temperatura lub Energia





Ciało stałe

Ciecz

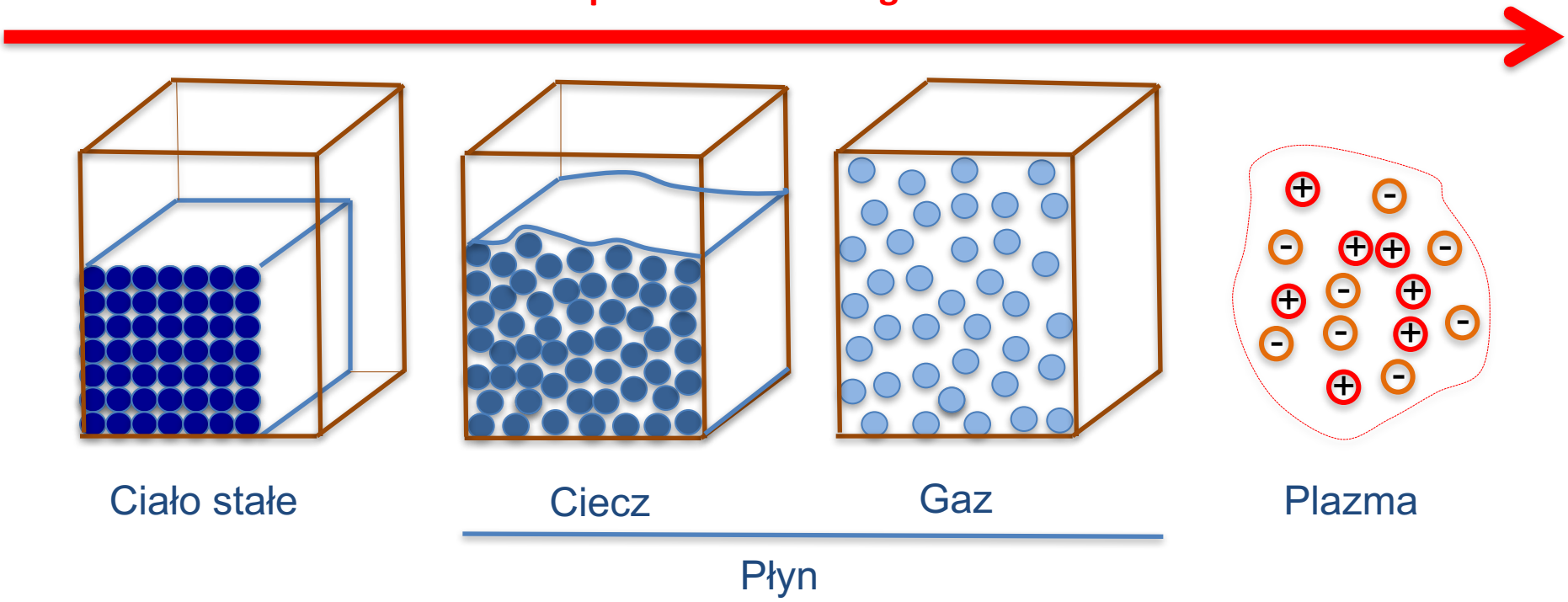
Gaz

Plazma

Płyn

CZTERY STANY SKUPIENIA MATERII

Temperatura lub Energia



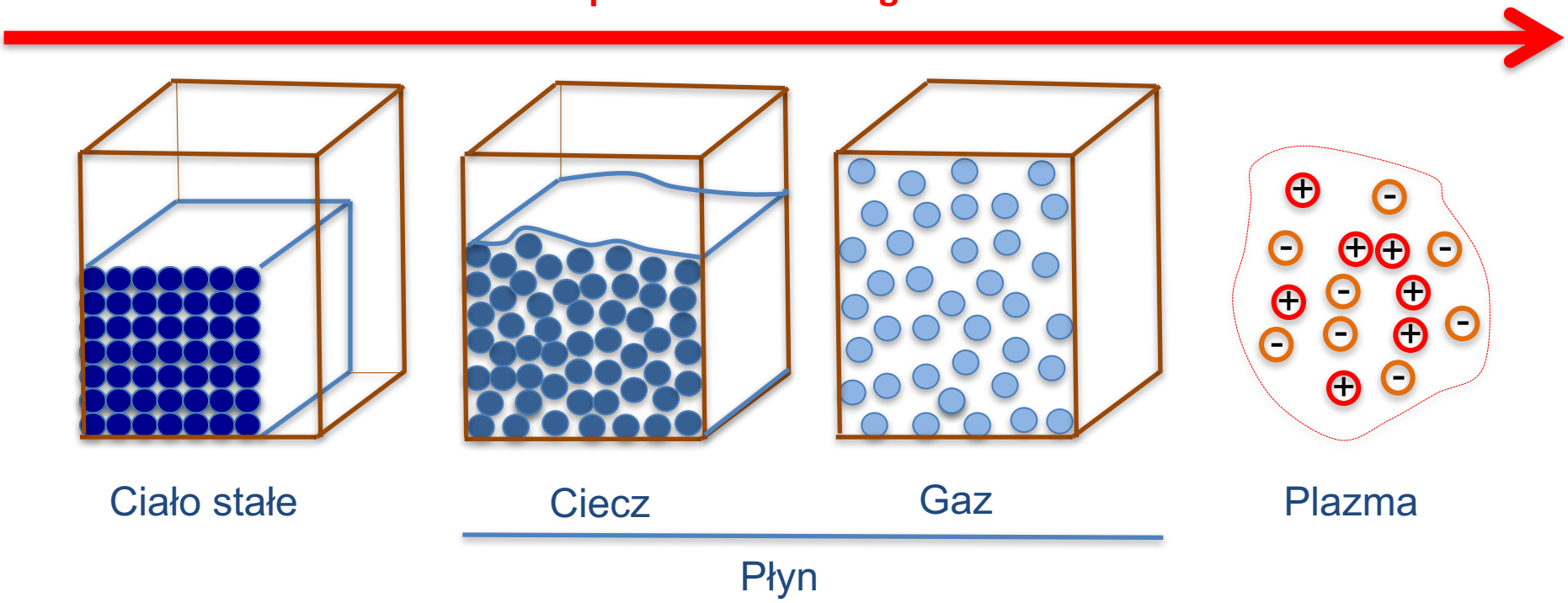
Ciało stałe – małe odległości między cząsteczkami;

cząsteczki drgają wokół swych położeń równowagi;

międzycząsteczkowe siły oddziaływania;

bardzo trudno zmienić objętość i kształt

CZTERY STANY SKUPIENIA MATERII



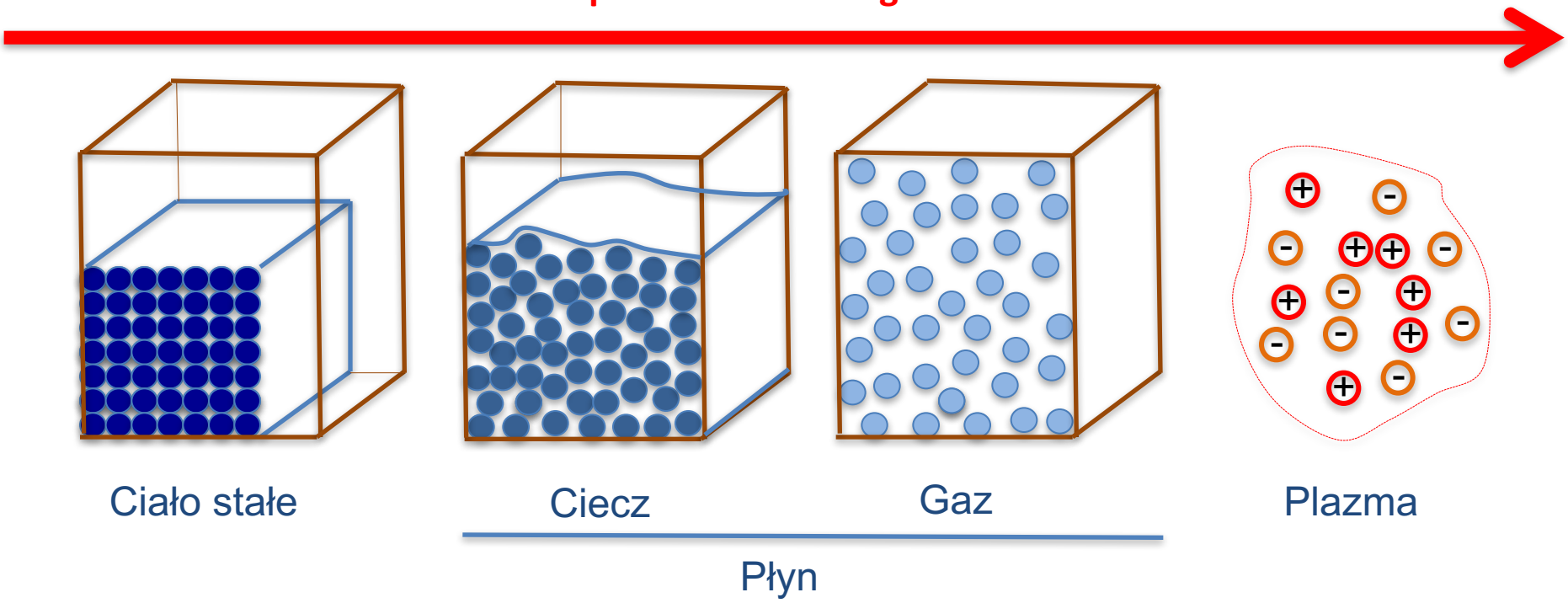
Ciecz – przyjmuje kształt naczynia; mała odległość między cząsteczkami;

cząsteczki są w nieustannym chaotycznym ruchu;

międzycząsteczkowe siły oddziaływania;

trudno zmienić objętość, łatwo zmienić kształt

CZTERY STANY SKUPIENIA MATERII

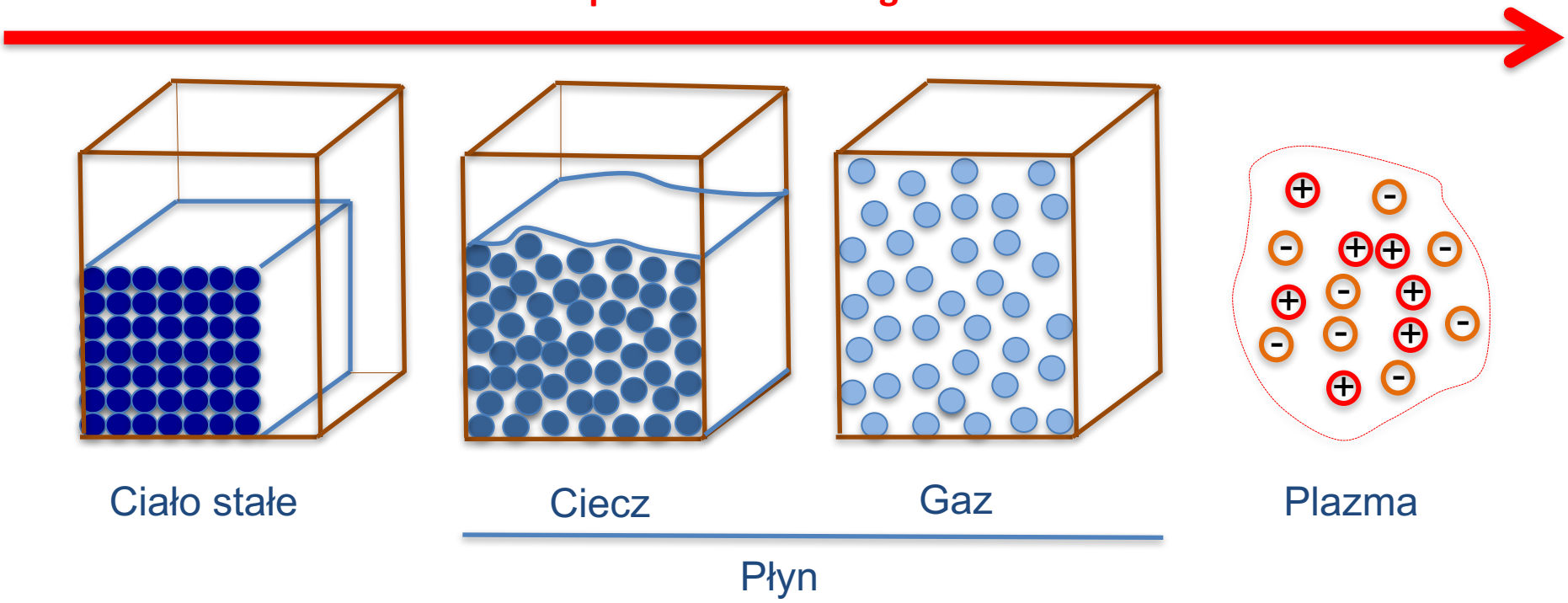


Gaz – przyjmuje kształt naczynia; odległość między cząsteczkami duża,

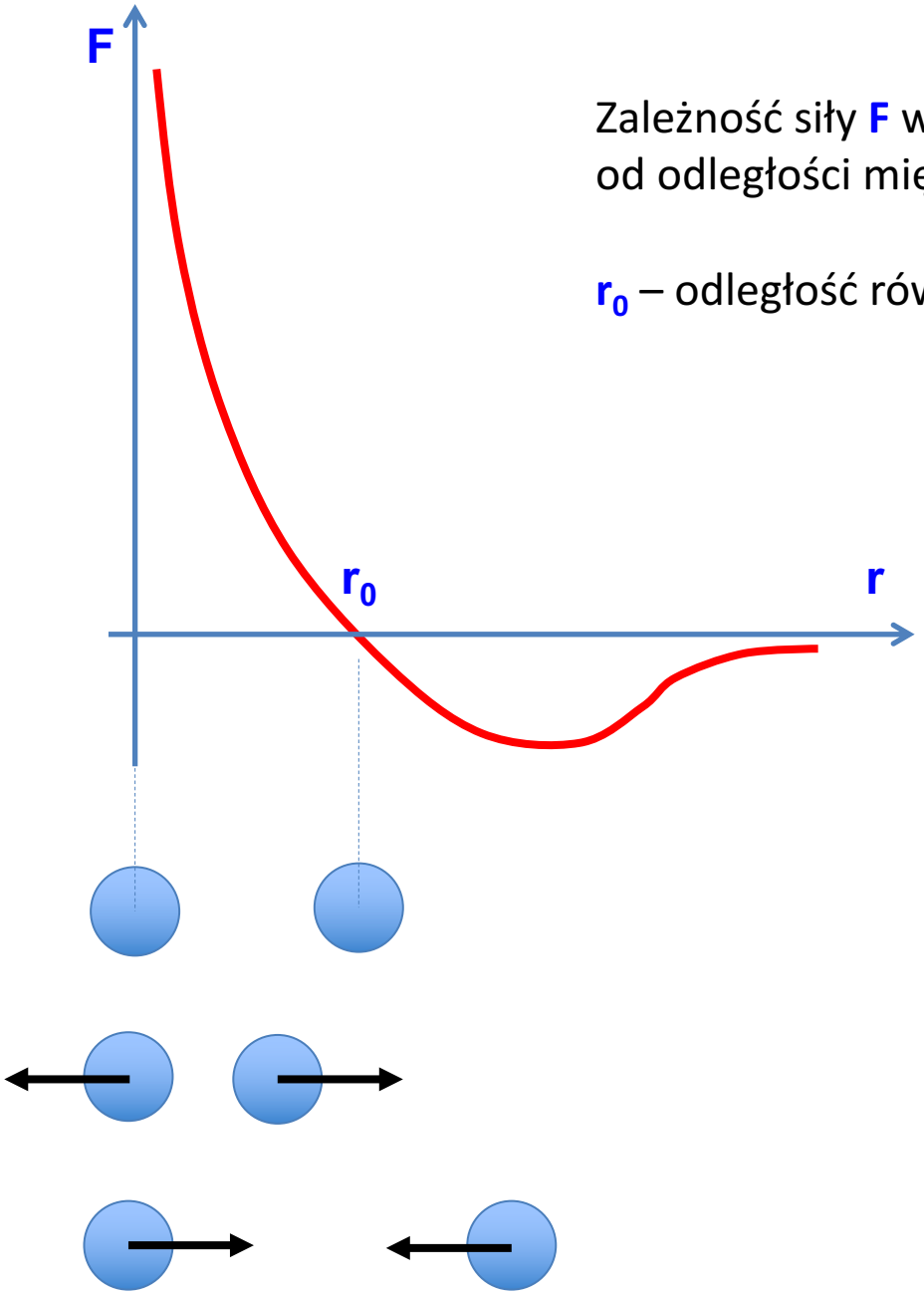
są w nieustannym chaotycznym ruchu, oddziałują przez zderzenia;

łatwo zmienić objętość (ściśliwość)

CZTERY STANY SKUPIENIA MATERII



Plazma – stan materii, w którym cząsteczki (a przynajmniej ich część) występują w stanie zjonizowanym



Zależność siły **F** wzajemnego oddziaływania od odległości międzyatomowej **r**

r_0 – odległość równowagi w ciele stałym

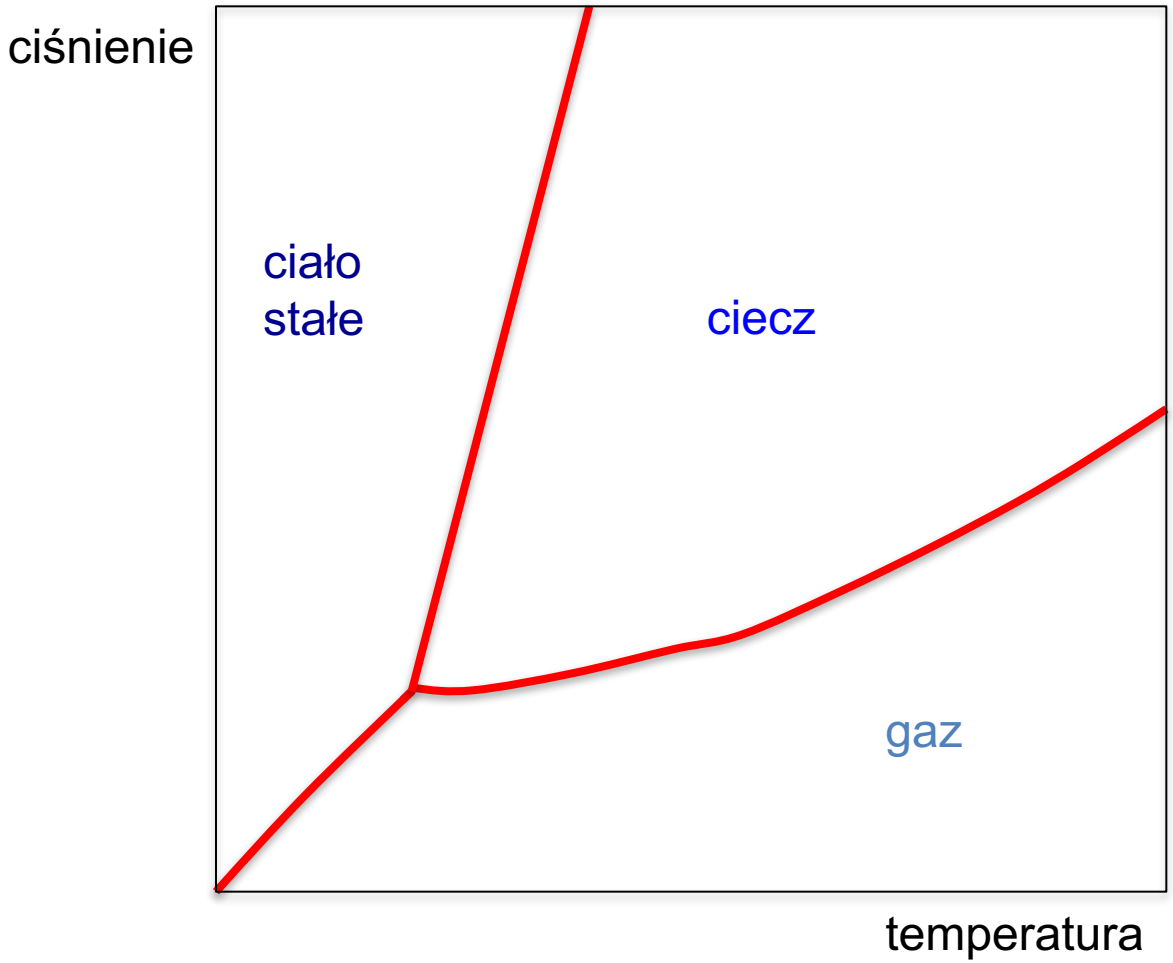


DIAGRAM FAZOWY POJEDYŃCZEJ SUBSTANCJI

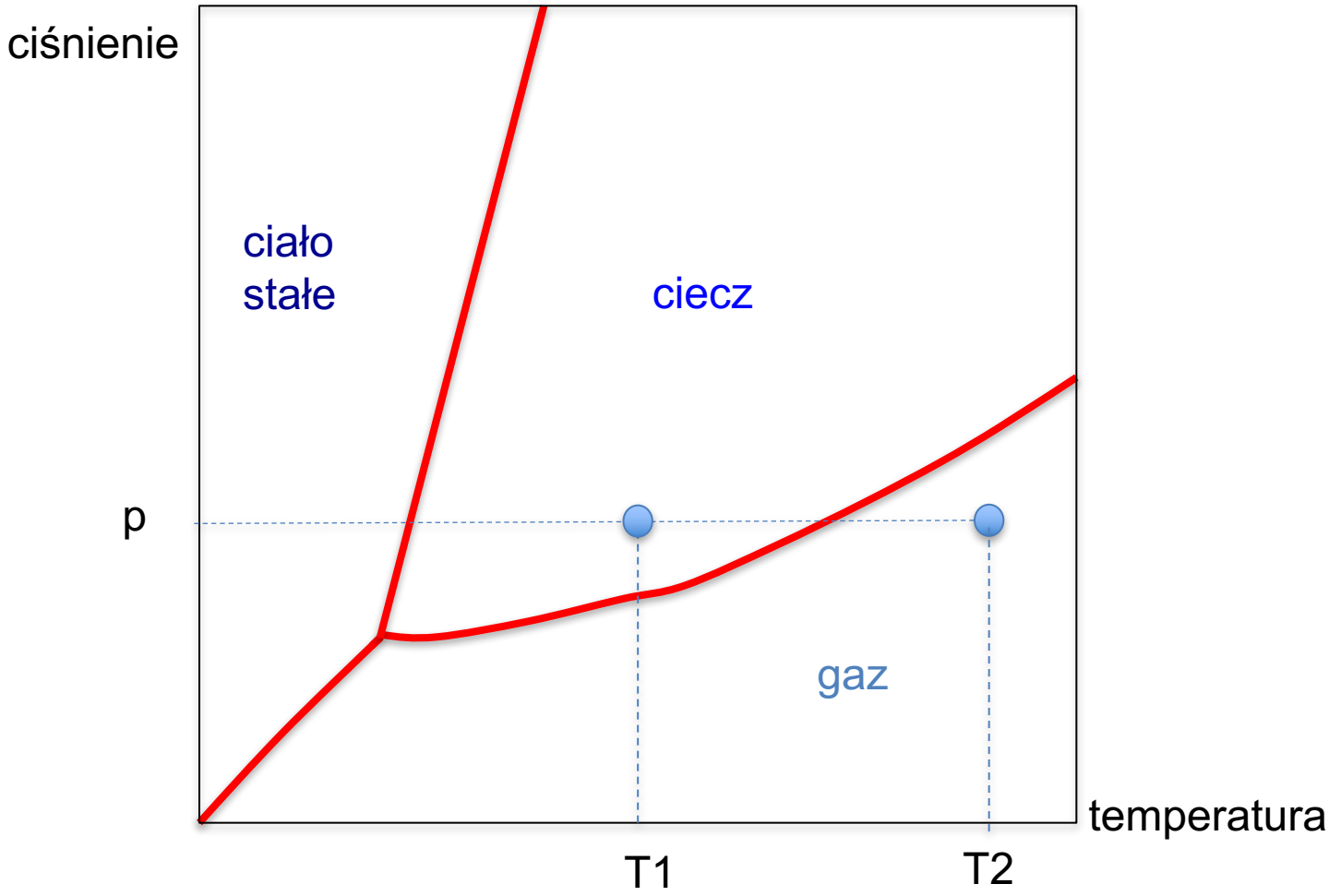


DIAGRAM FAZOWY POJEDYŃCZEJ SUBSTANCJI

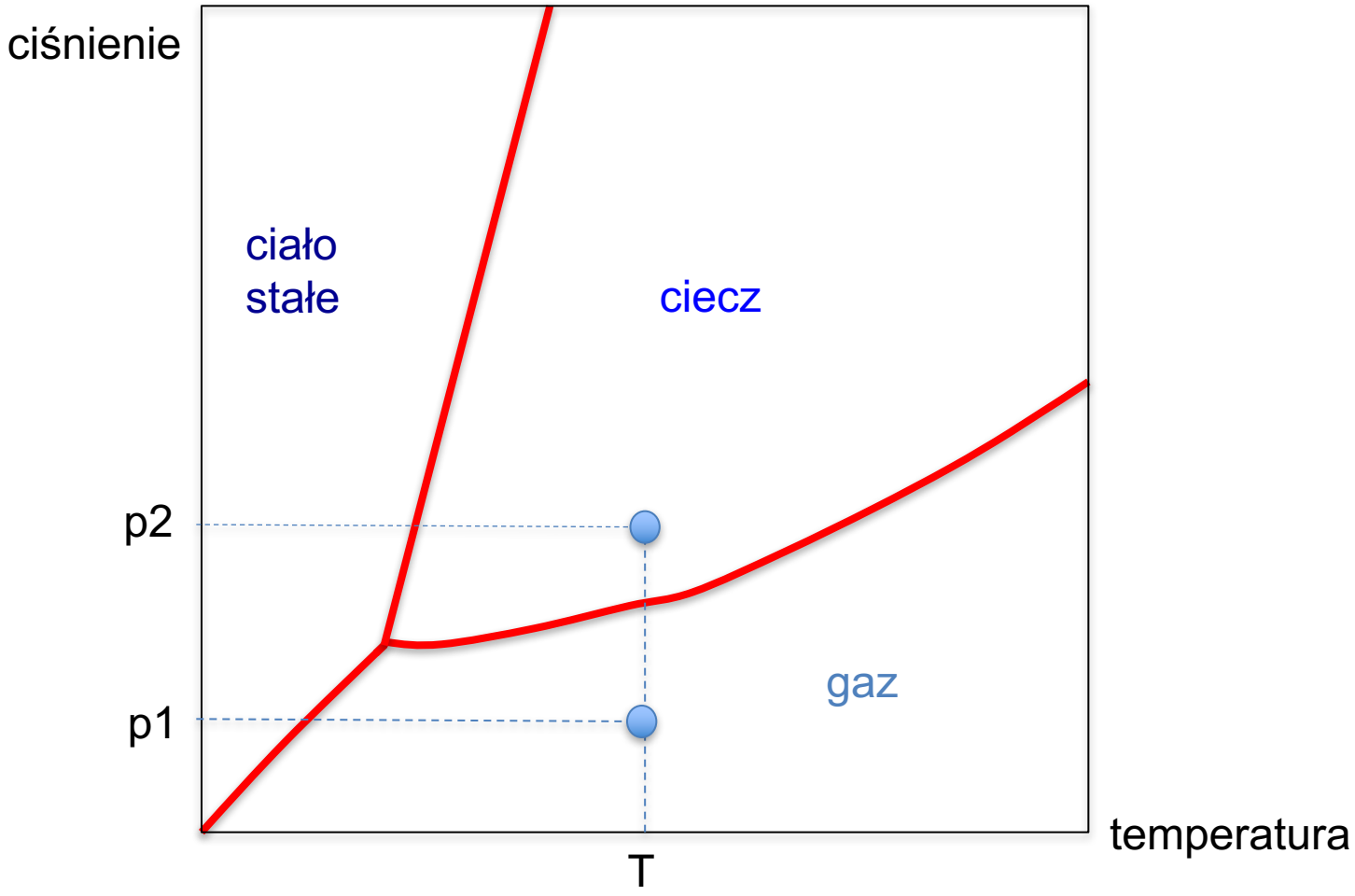
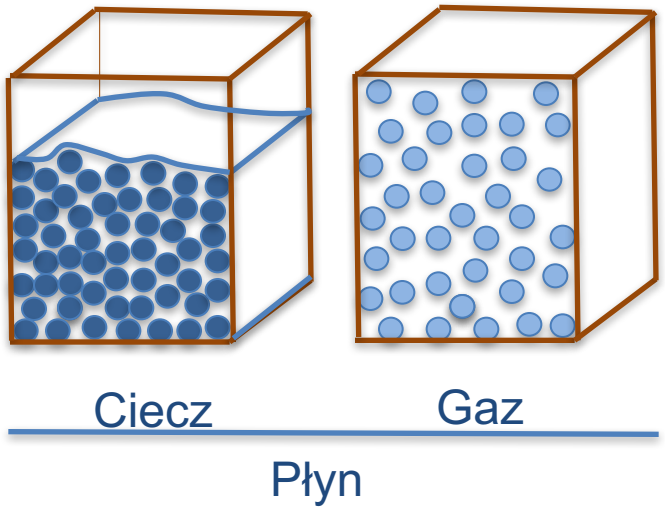


DIAGRAM FAZOWY POJEDYŃCZEJ SUBSTANCJI

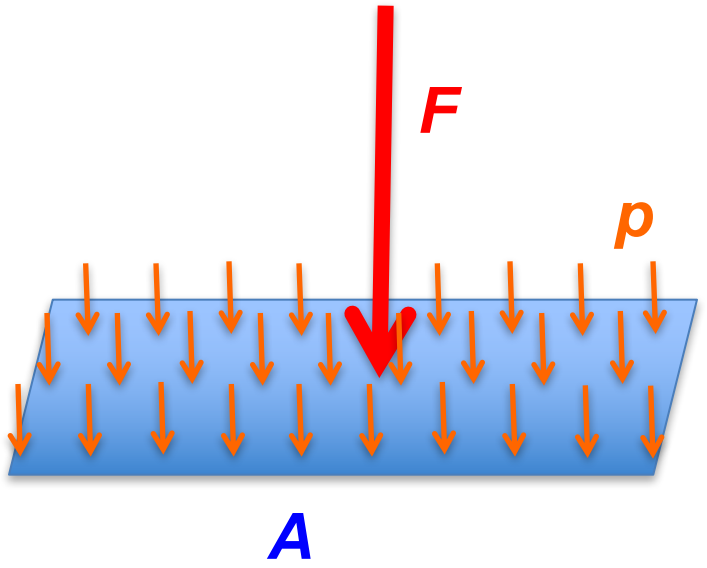
Pojęciem płynu obejmujemy ciecze i gazy. Są to ciała nie posiadające zdolności utrzymania kształtu, a więc z bardzo małą sprężystością postaciową. Elementy płynu z łatwością zmieniają położenie w obrębie rozpatrywanej masy (w przeciwieństwie do ciał stałych, które zmieniają kształt pod działaniem dużych sił zewnętrznych i charakteryzują się sprężystością objętościową i postaciową).

Ciecze, w odróżnieniu od gazów, nie przejawiają tendencji do nieograniczonego rozszerzania się; mają zatem swoistą objętość nieznacznie zmieniającą się pod wpływem sił zewnętrznych, mają więc sprężystość objętościową określoną parametrami ξ lub E. Ściśliwość cieczy jest dużo mniejsza od ściśliwości gazów.



CIŚNIENIE

$$p = \frac{F}{A} \qquad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$$



$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}A}$$

$$F = p\,A$$

$$F = \int_A p\,\mathrm{d}A$$

CIŚNIENIE

	paskal	bar	N/mm²	kG/m²	kG/cm² atmosfera techniczna (at)
1 Pa (N/m²) =	1	10^{-5}	10^{-6}	0,102	$1{,}02 \cdot 10^{-5}$
1 bar (daN/cm²) =	10^{5}	1	0,1	10200	1,02
1 N/mm² =	10^{6}	10	1	$1{,}02 \cdot 10^{5}$	10,2
1 kG/m² =	9,80665	$9{,}80665 \cdot 10^{-5}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-6}$	1	10^{-4}
1 atmosfera techniczna (at) = 1 kG/cm² =	98066,5	0,980665	0,0980665	10000	1
1 atmosfera fizyczna (atm) = (760 tor [Tr]) =	101325	1,013	0,1013	10330	1,033
1 tor [Tr] = 1 mmHg =	133	0,00133	$1{,}33 \cdot 10^{-4}$	13,6	0,00136
1 psi =	6894,76	$6{,}89476 \cdot 10^{-2}$	$6{,}89476 \cdot 10^{-3}$	702,99	$7{,}0307 \cdot 10^{-2}$

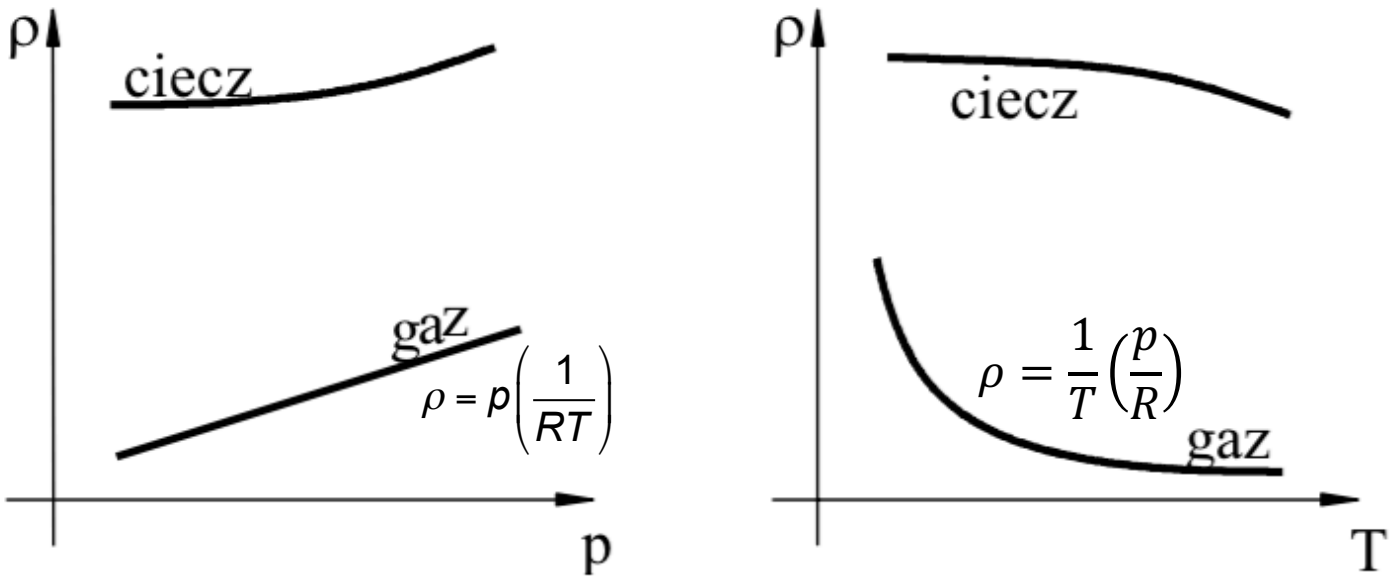
GĘSTOŚĆ, CIĘŻAR WŁAŚCIWY, OBJĘTOŚĆ WŁAŚCIWA

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \qquad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

Płyn poddany temu samemu ciśnieniu ma jednakową gęstość w każdym punkcie

$$\gamma = \rho g \qquad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}m} = \frac{1}{\rho} \qquad \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right]$$



$$\frac{p}{\rho} = RT$$

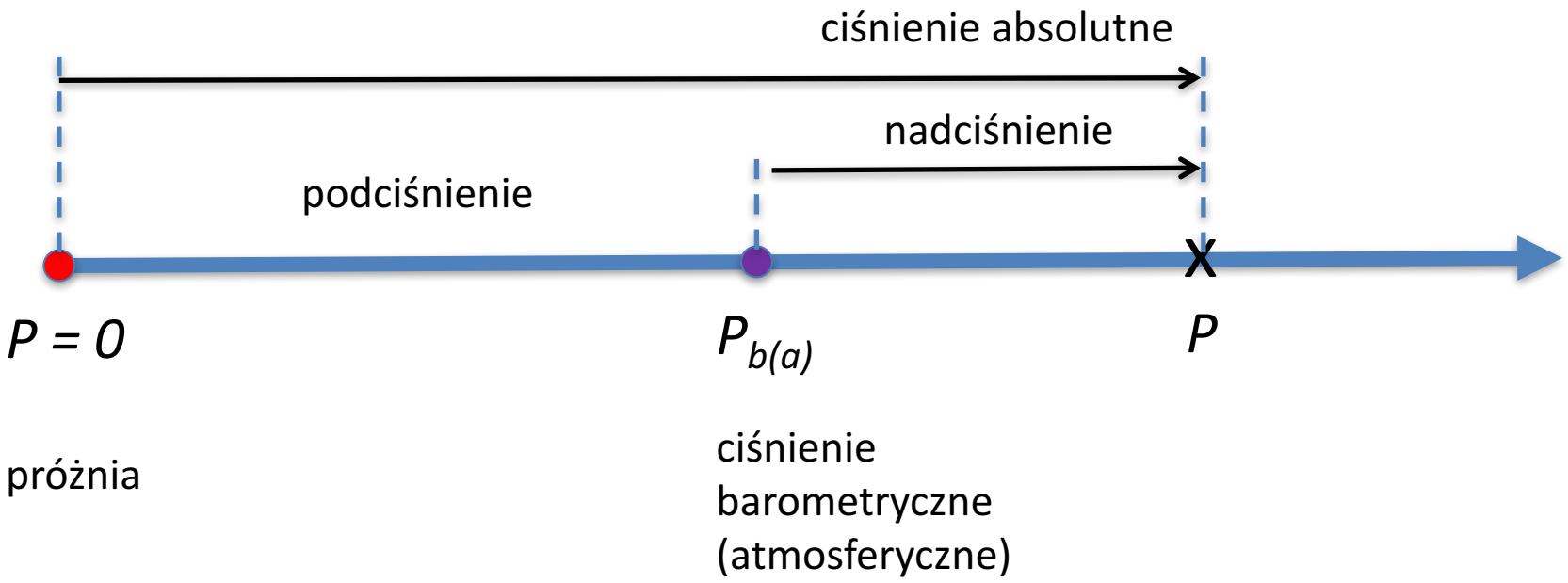
Zmiana gęstości płynu w zależności od ciśnienia i temperatury

MECHANIKA PŁYNÓW

CIŚNIENIE

RÓWNOWAGA CIECZY

Ciśnienie. Równowaga cieczy



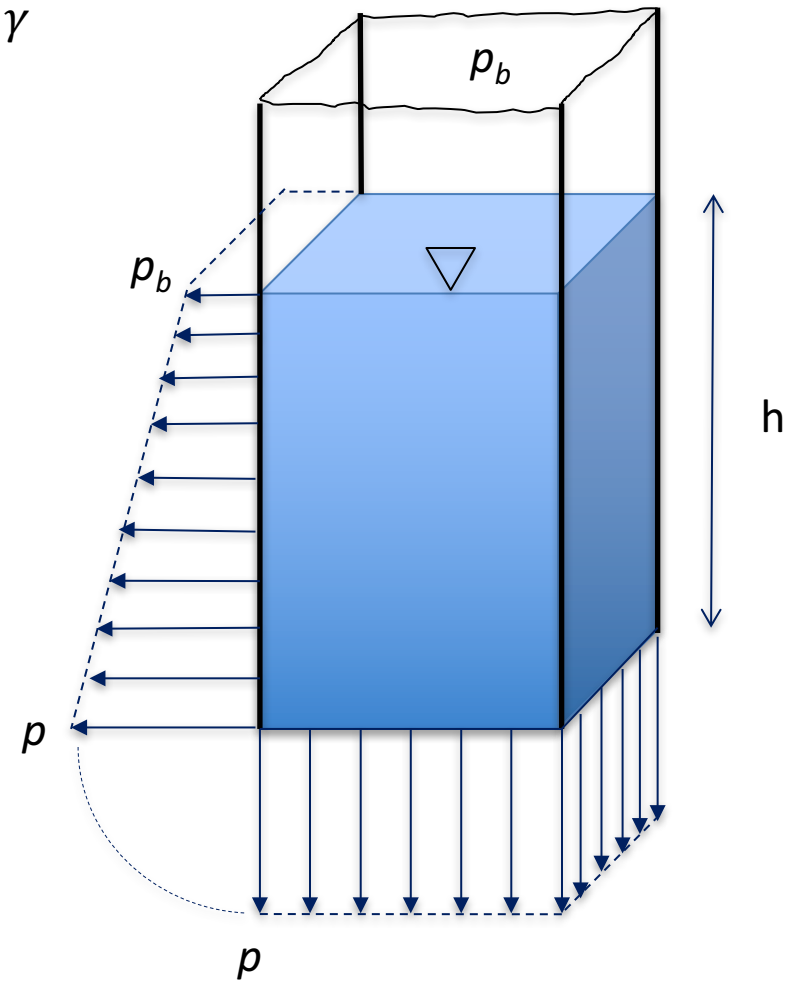
Na wysokości 0 m n.p.m. p_b = 101,3kPa (przy T=288,3K)

Ciśnienie hydrostatyczne

$$Q = abh \cdot \gamma$$

$$ciśnienie\ hydrostatyczne = \frac{Q}{ab} = h \cdot \gamma$$

$$p = h \cdot \gamma + p_b$$

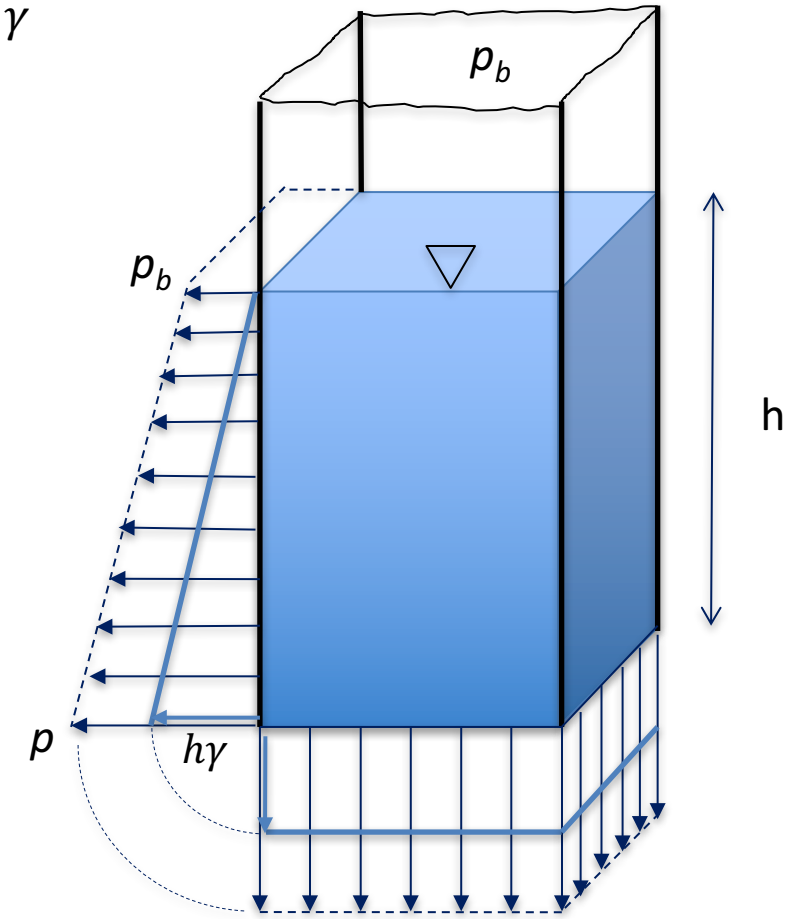


Ciśnienie hydrostatyczne

$$Q = abh \cdot \gamma$$

$$ciśnienie\ hydrostatyczne = \frac{Q}{ab} = h \cdot \gamma$$

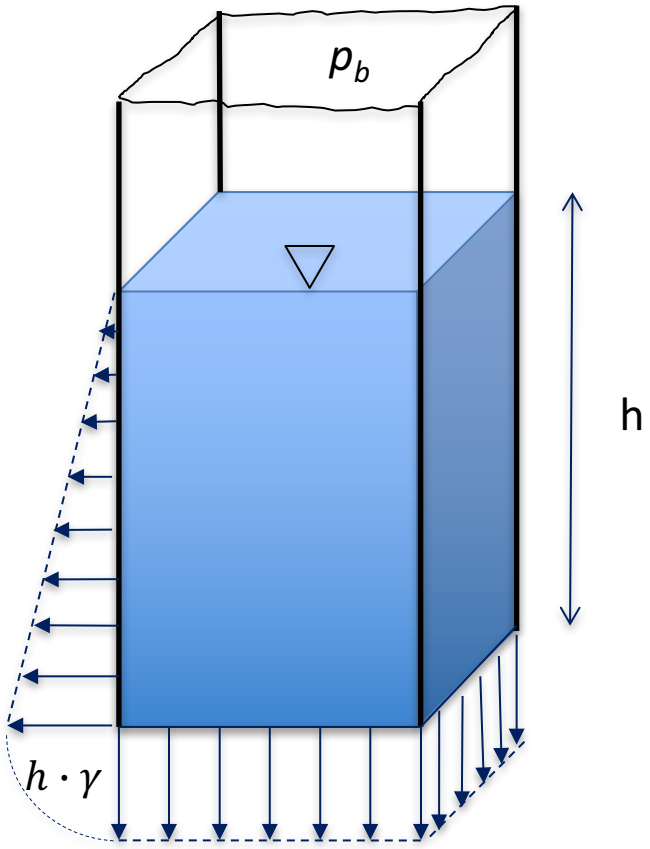
$$p = h \cdot \gamma + p_b$$



Ciśnienie hydrostatyczne

$$Q = abh \cdot \gamma$$

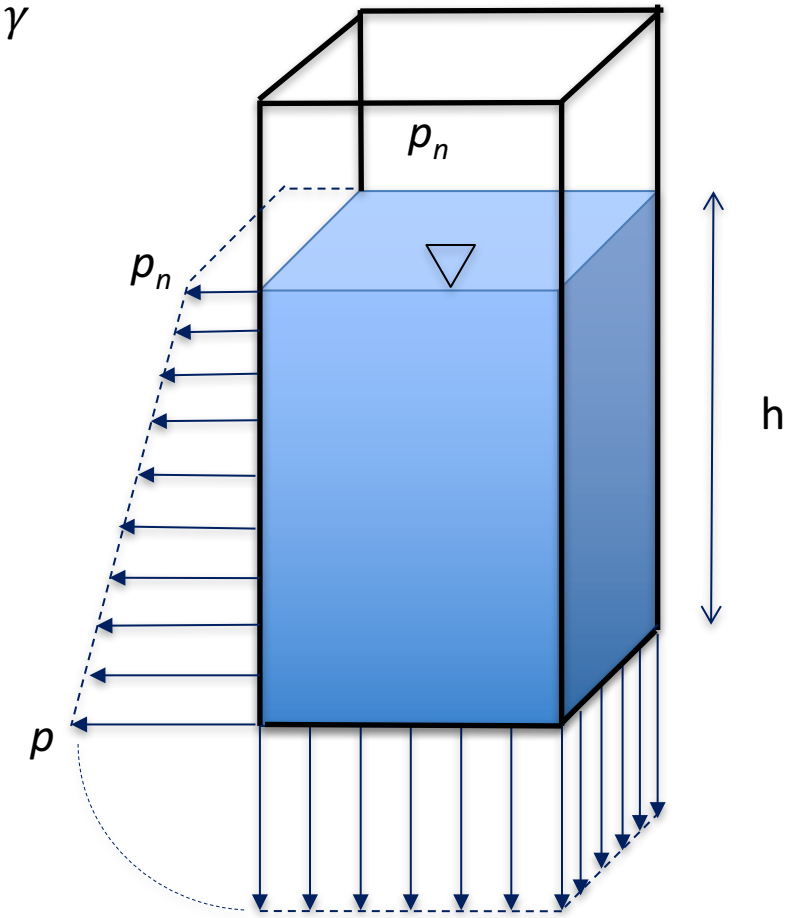
$$ciśnienie\ hydrostatyczne = \frac{Q}{ab} = h \cdot \gamma$$



Ciśnienie hydrostatyczne

$$Q = abh \cdot \gamma$$

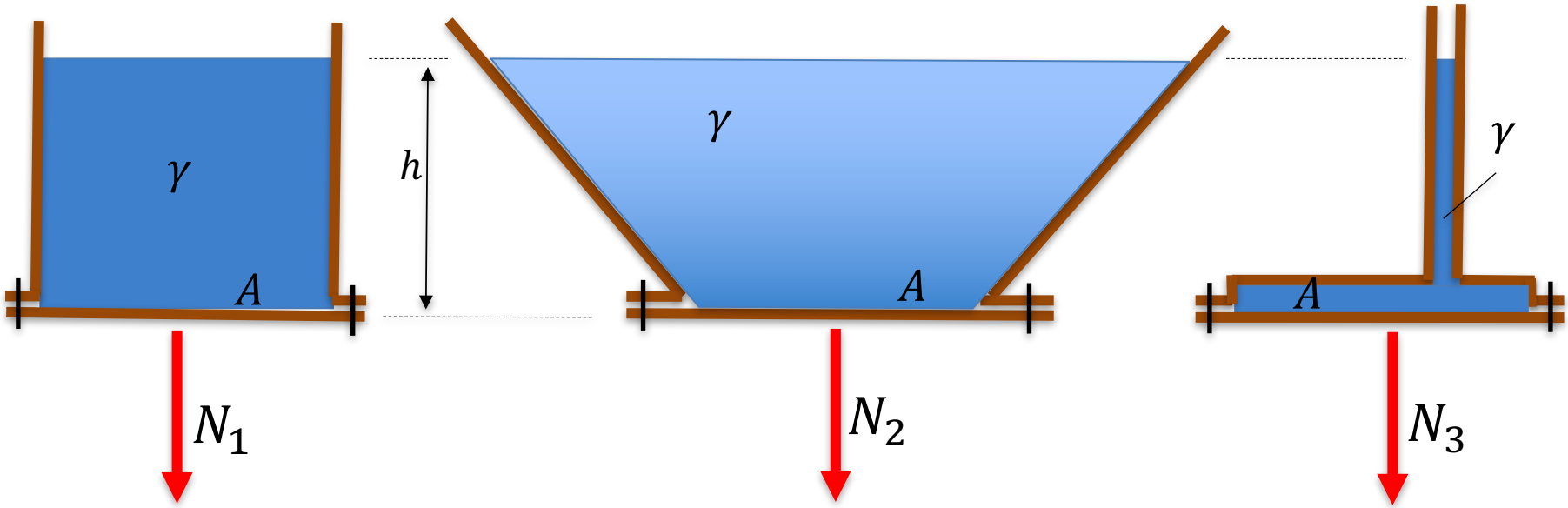
$$ciśnienie\ hydrostatyczne = \frac{Q}{ab} = h \cdot \gamma$$



$$p = h \cdot \gamma + p_n$$

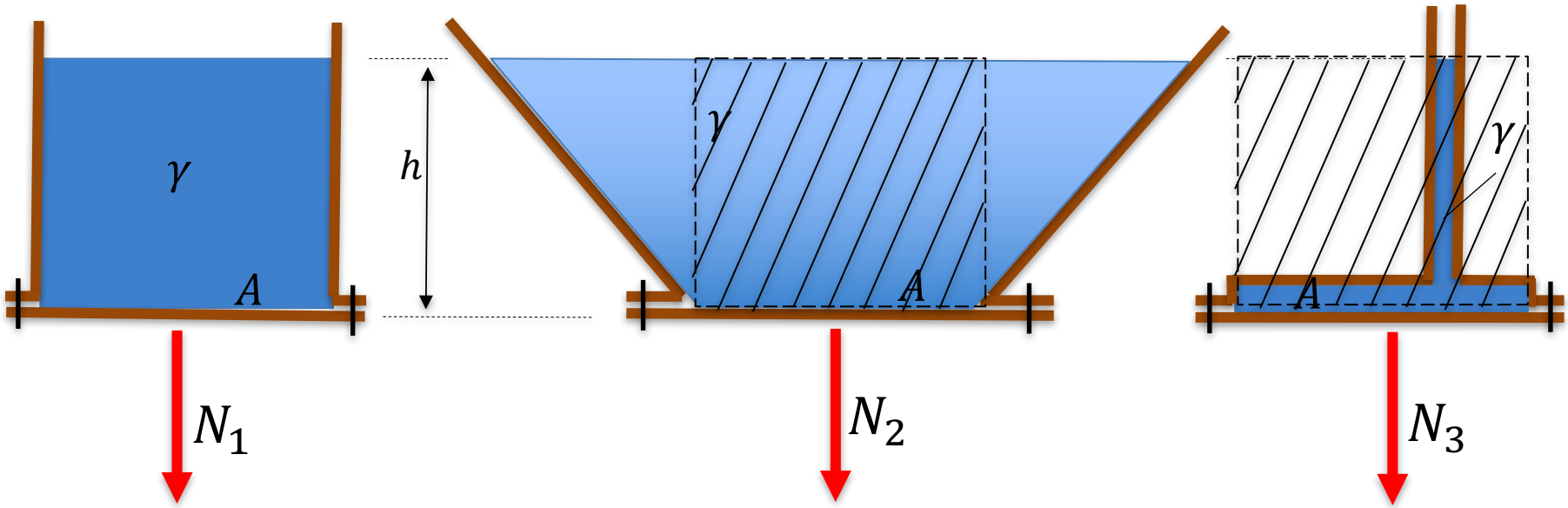
zbiornik zamknięty
p_n – nadciśnienie nad powierzchnią cieczy

Paradoks hydrostatyczny



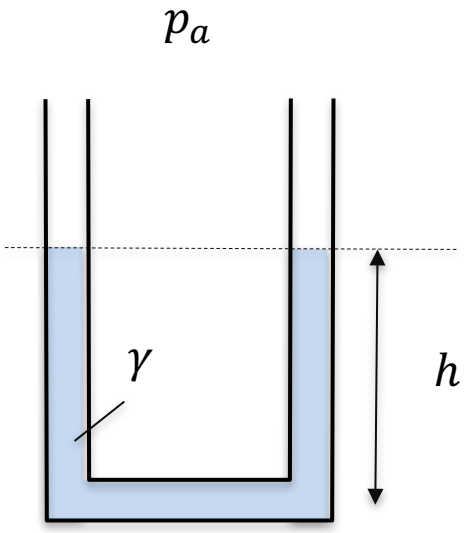
$$N_1 = N_2 = N_3 = Ah\gamma = V\gamma$$

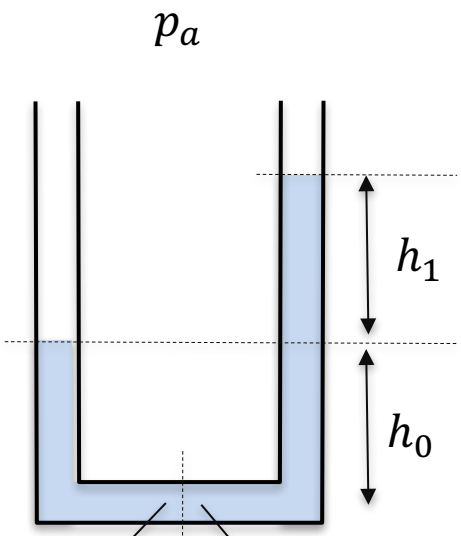
Paradoks hydrostatyczny



$$N_1 = N_2 = N_3 = Ah\gamma = V\gamma$$

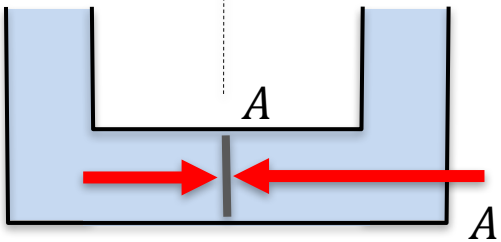
Równowaga cieczy jednorodnej (γ = const. w całej objętości)





$p_a + h_0\gamma$

$p_a + (h_1 + h_0)\,\gamma$

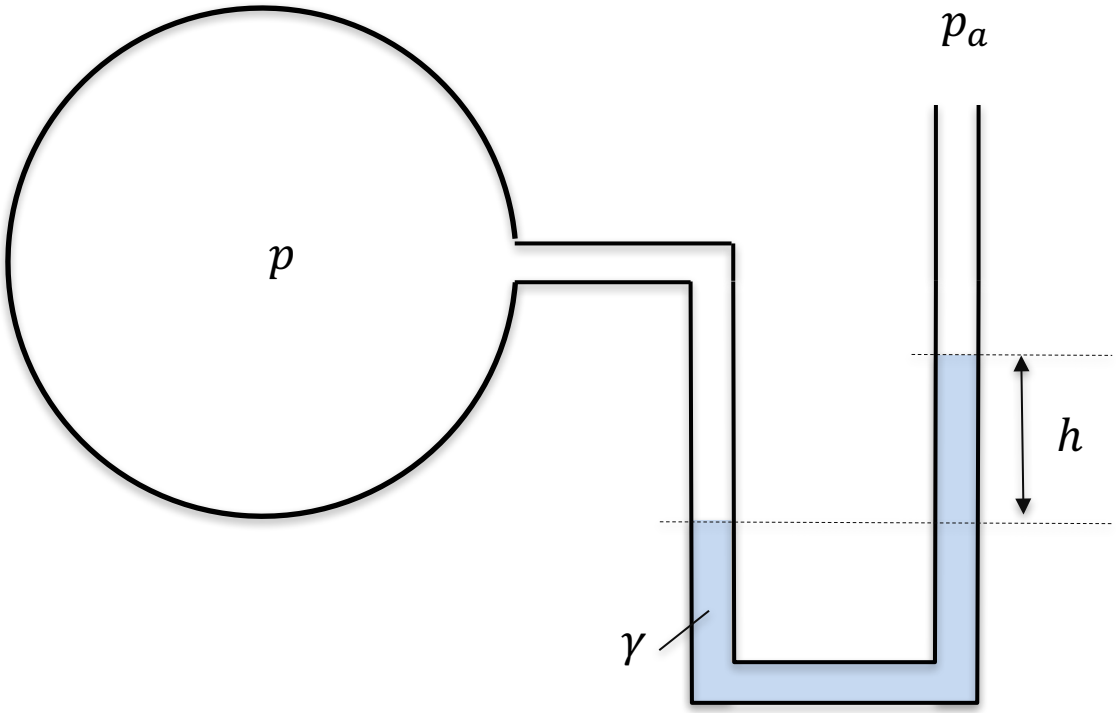


$F_1 = A[p_a + h_0\gamma\,]$

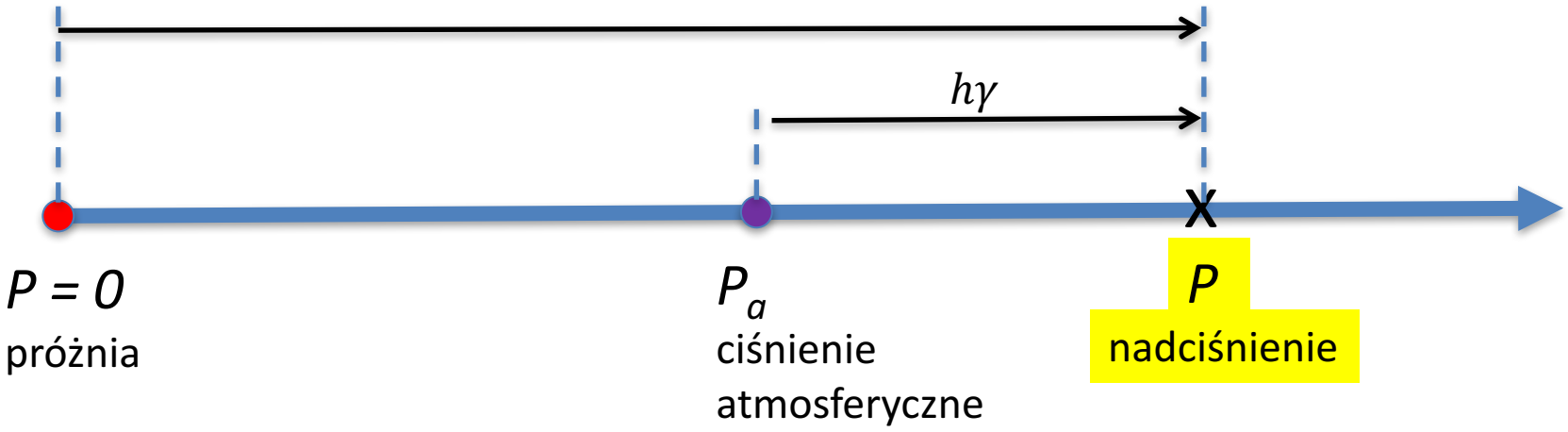
$F_2 = A[p_a + (h_1 + h_0)\,\gamma\,]$

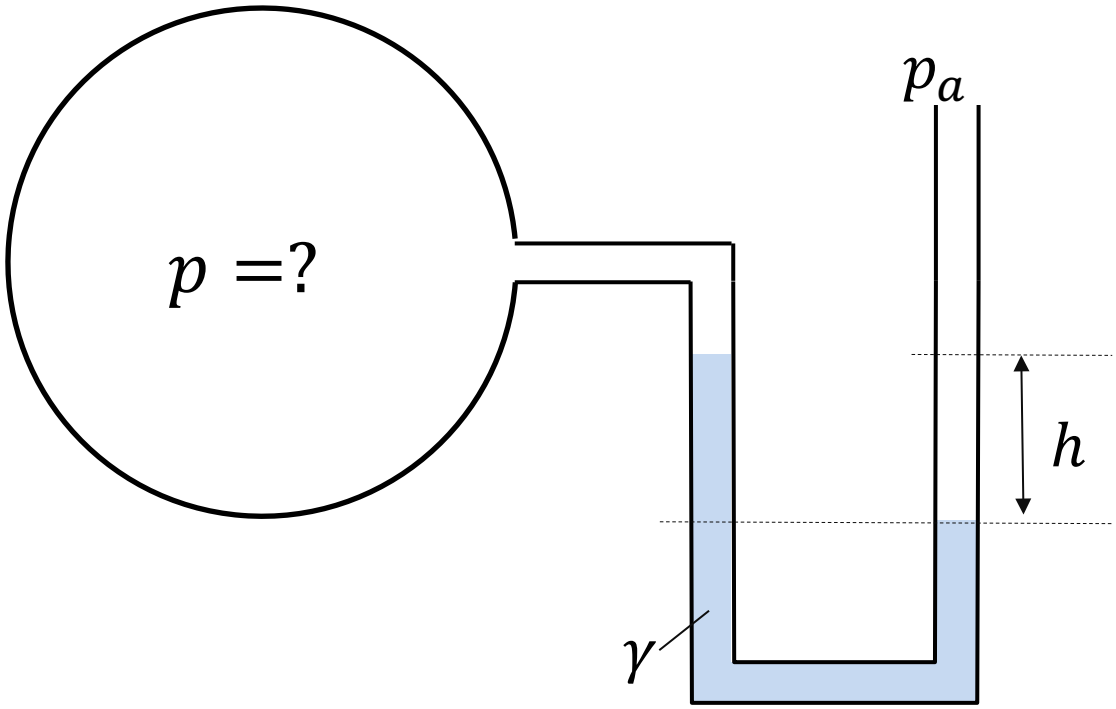


Naczynia połączone

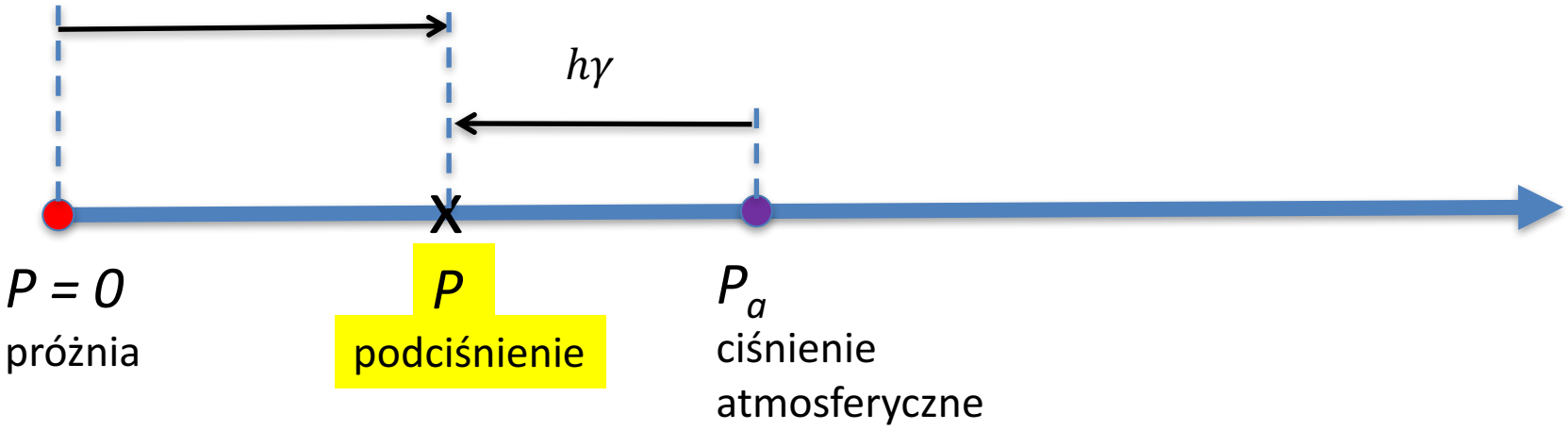

p_a
p
h
γ

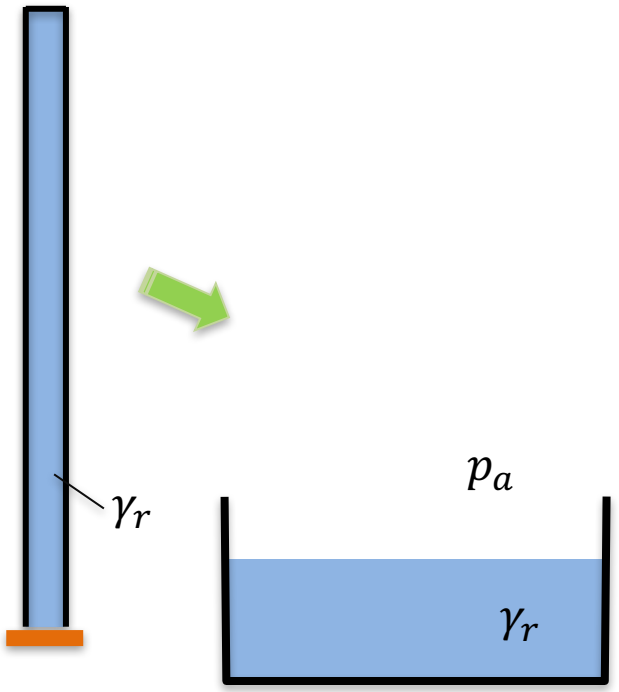
Manometr


$h\gamma$
$P = 0$
próżnia
P_a
ciśnienie
atmosferyczne
P
nadciśnienie

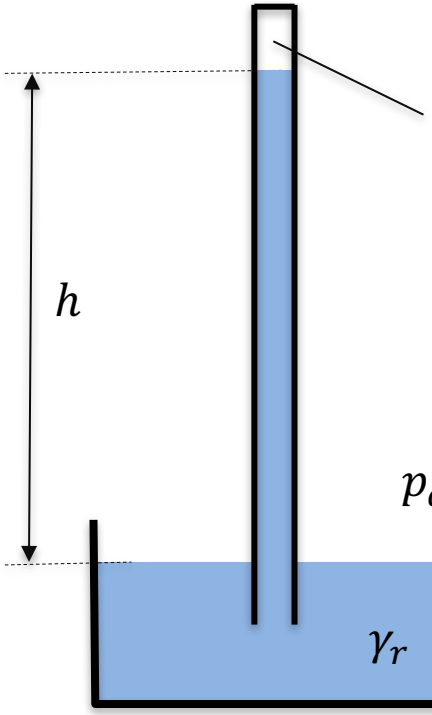

p_a
$p = ?$
h
γ

Manometr


$h\gamma$
$P = 0$
próżnia
P
podciśnienie
P_a
ciśnienie
atmosferyczne



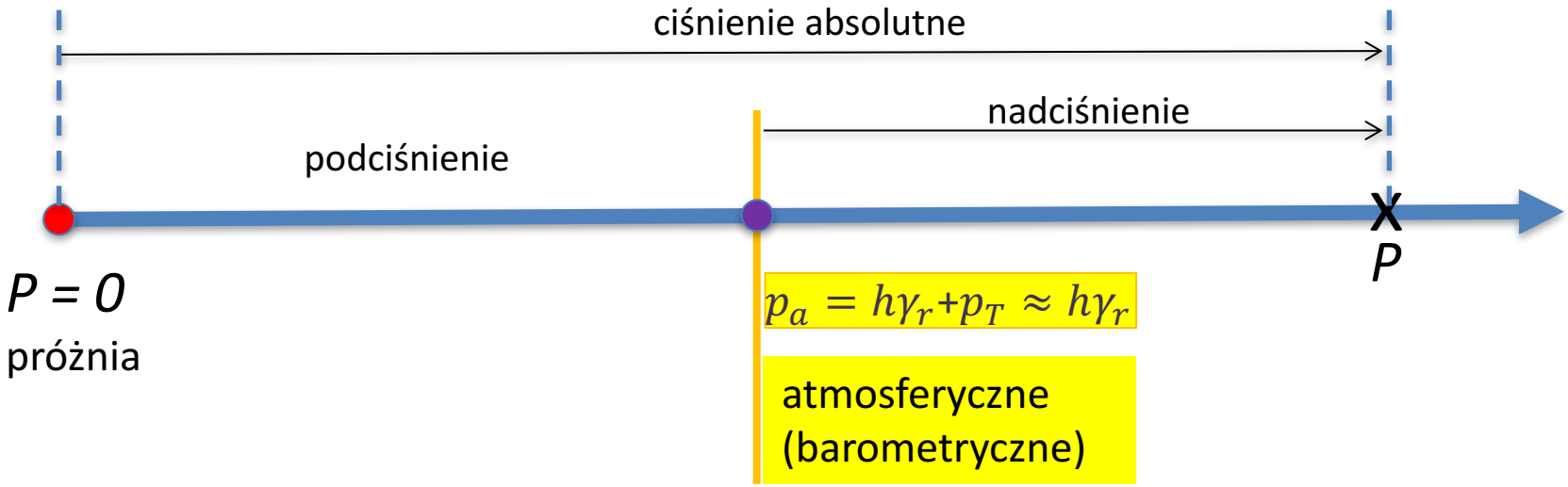
Barometr



pary rtęci
(próżnia Torriceliego)

$p_T = 0{,}133\ \text{Pa} \approx 0$

$p_a = 101{,}3\ \text{kPa} \gg p_T$



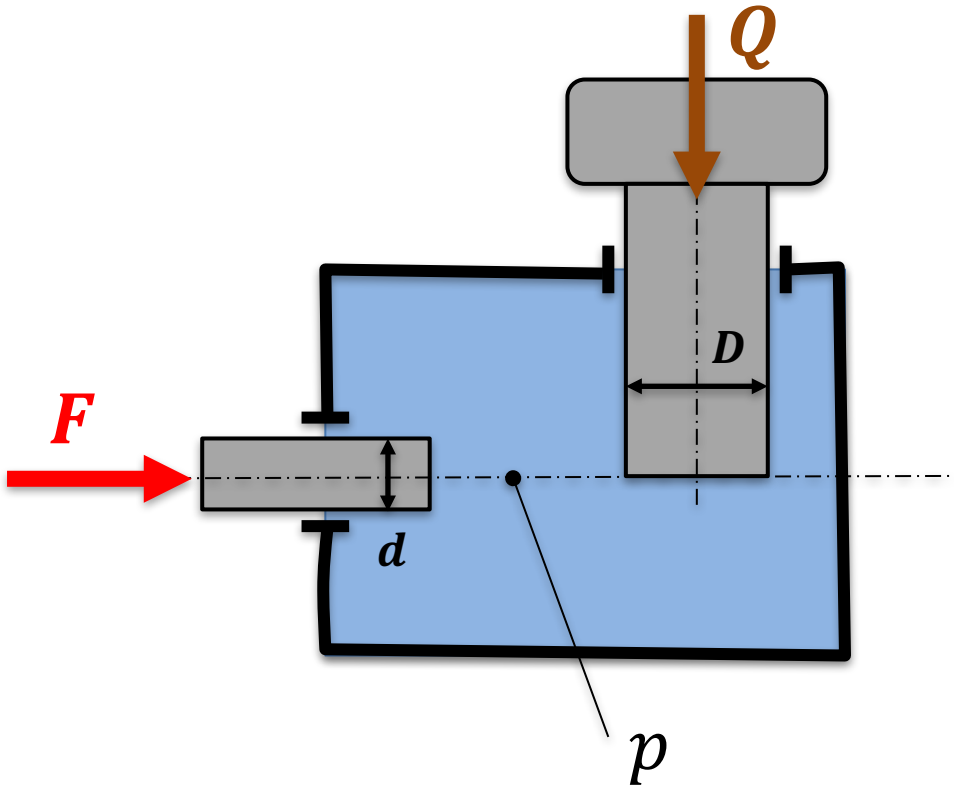
Wyznaczyć siłę F równoważącą ciężar Q tłoka

$Q, D, d;$ $\quad F=?$

$$Q = p\frac{\pi D^2}{4} \quad \rightarrow \quad p = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$F = p\frac{\pi d^2}{4}$$

$$\boxed{F = Q\frac{d^2}{D^2}}$$



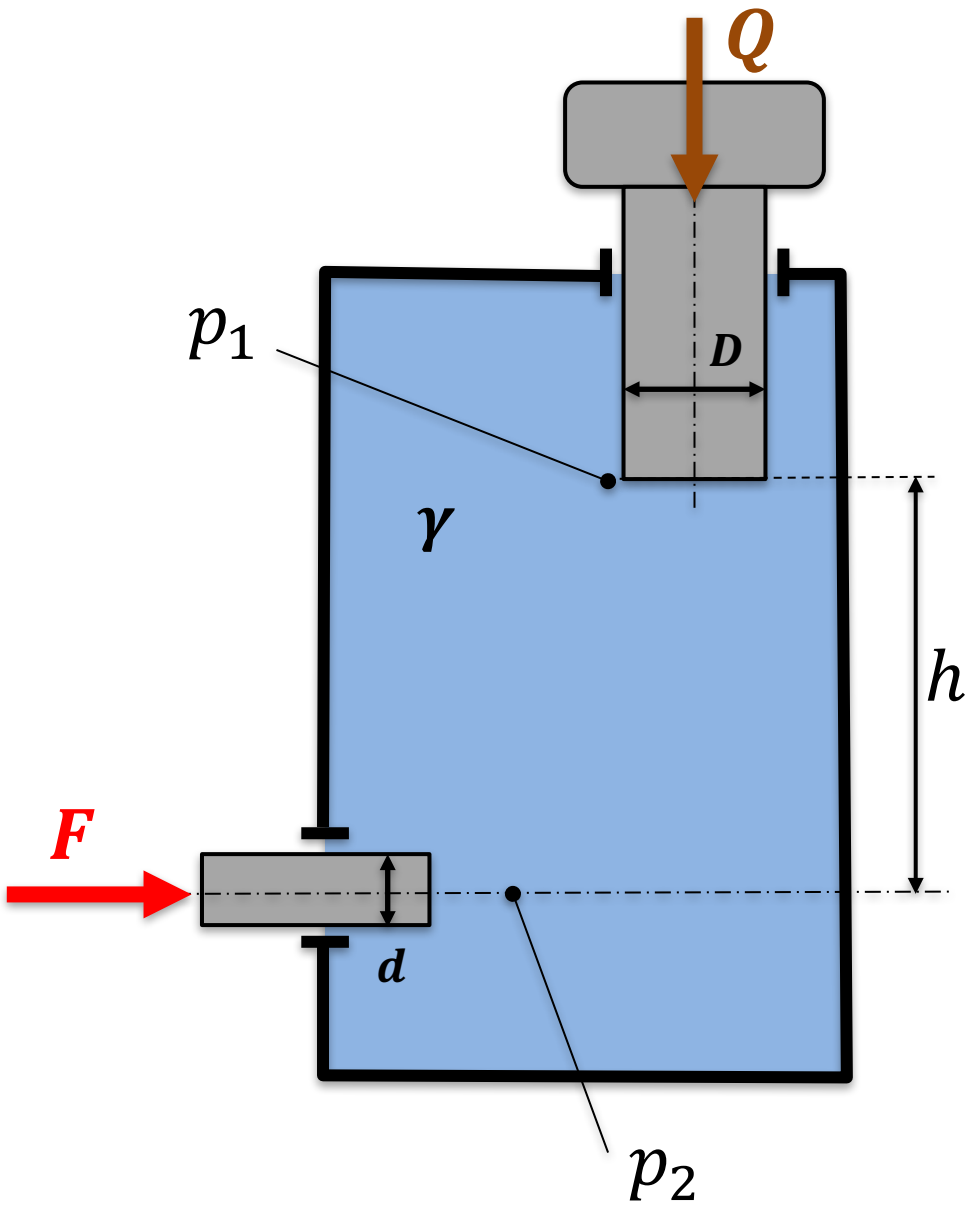
Wyznaczyć siłę *F* równoważącą ciężar *Q* tłoka

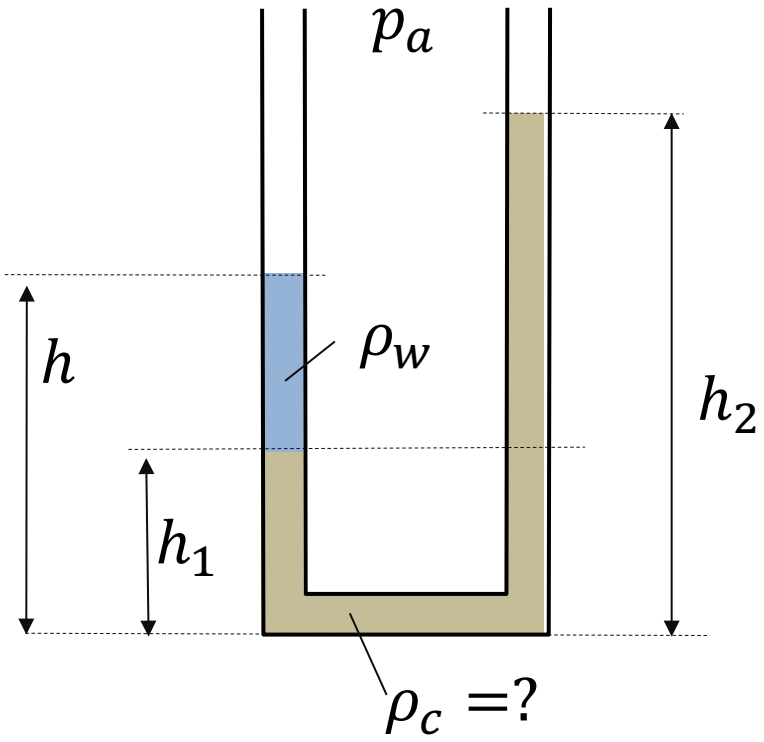
$$p_2 = h \cdot \gamma + p_1$$

$$Q = p_1 \frac{\pi D^2}{4}$$

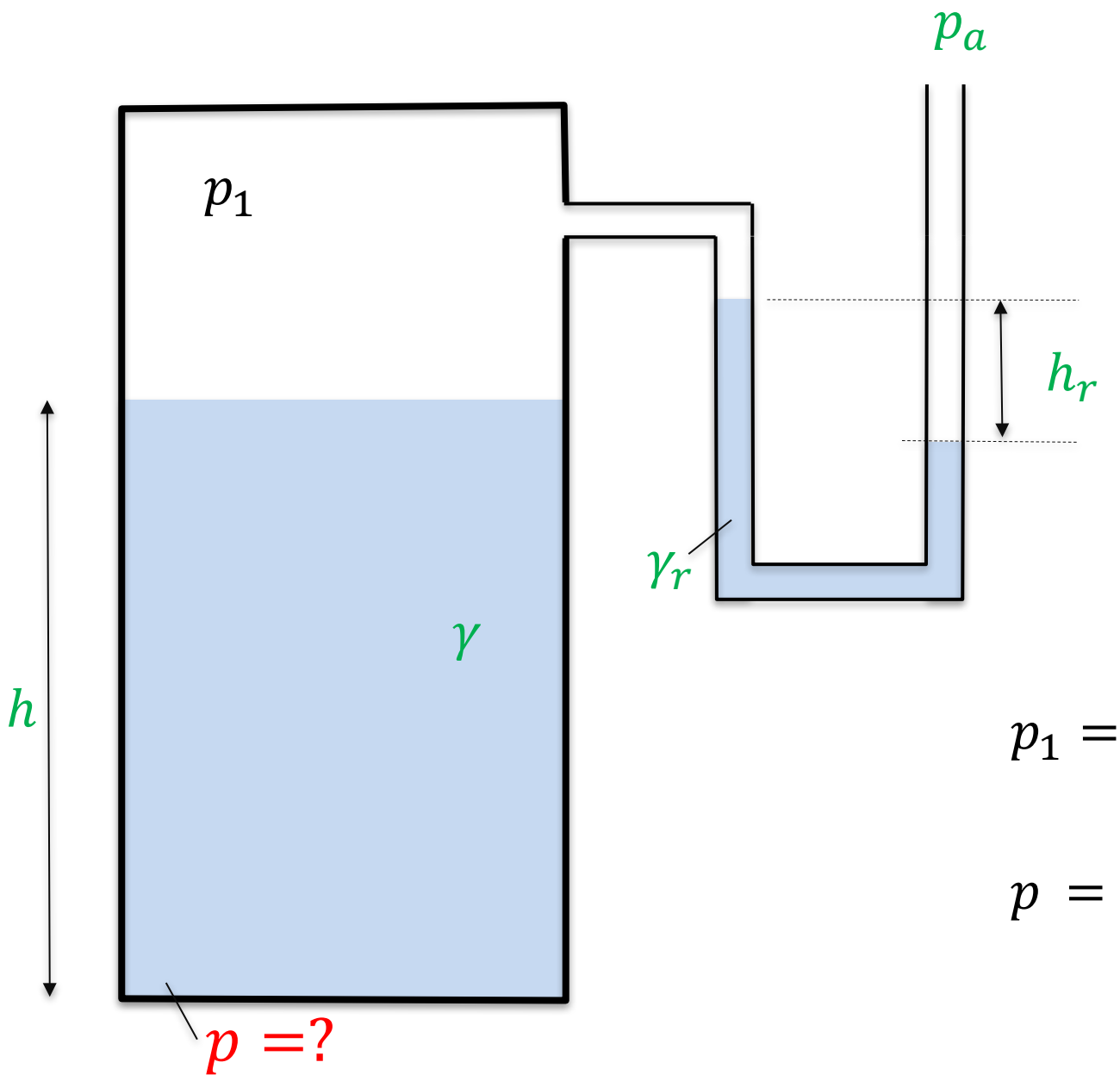
$$F = p_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\boxed{F = h\gamma \frac{\pi d^2}{4} + Q \frac{d^2}{D^2}}$$



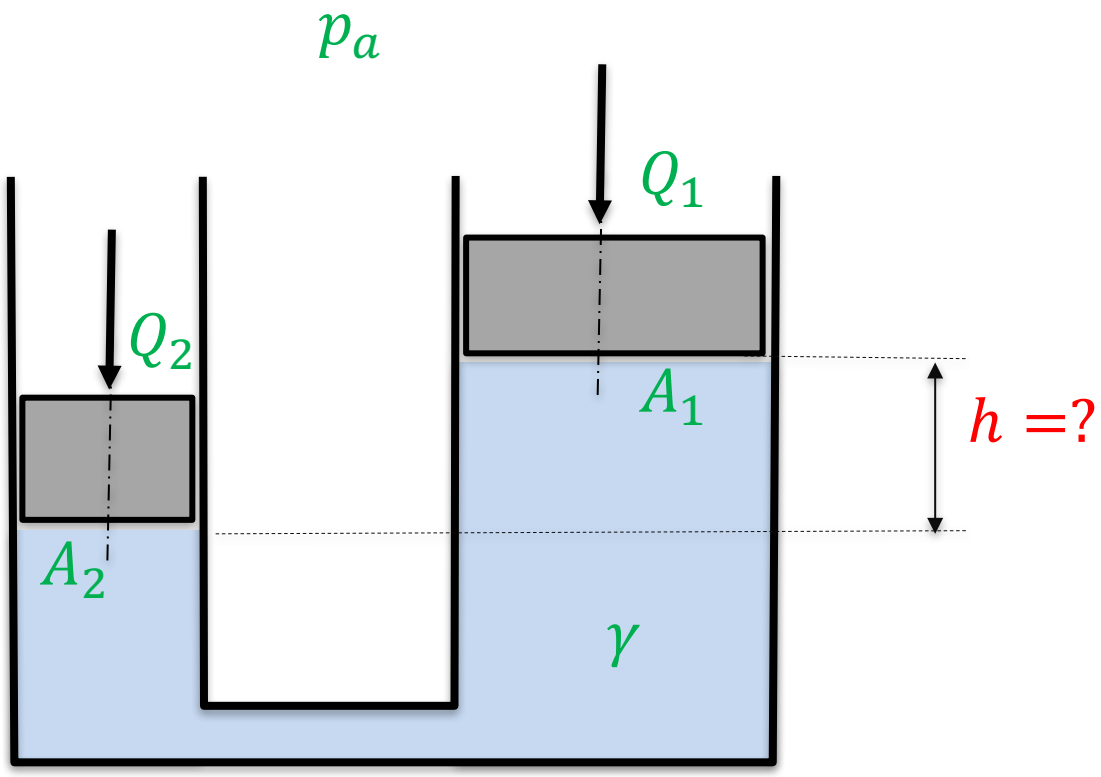


$$p_a + \rho_w g(h - h_1) = p_a + \rho_c g(h_2 - h_1)$$



$$p_1 = p_a - h_r \gamma_r$$

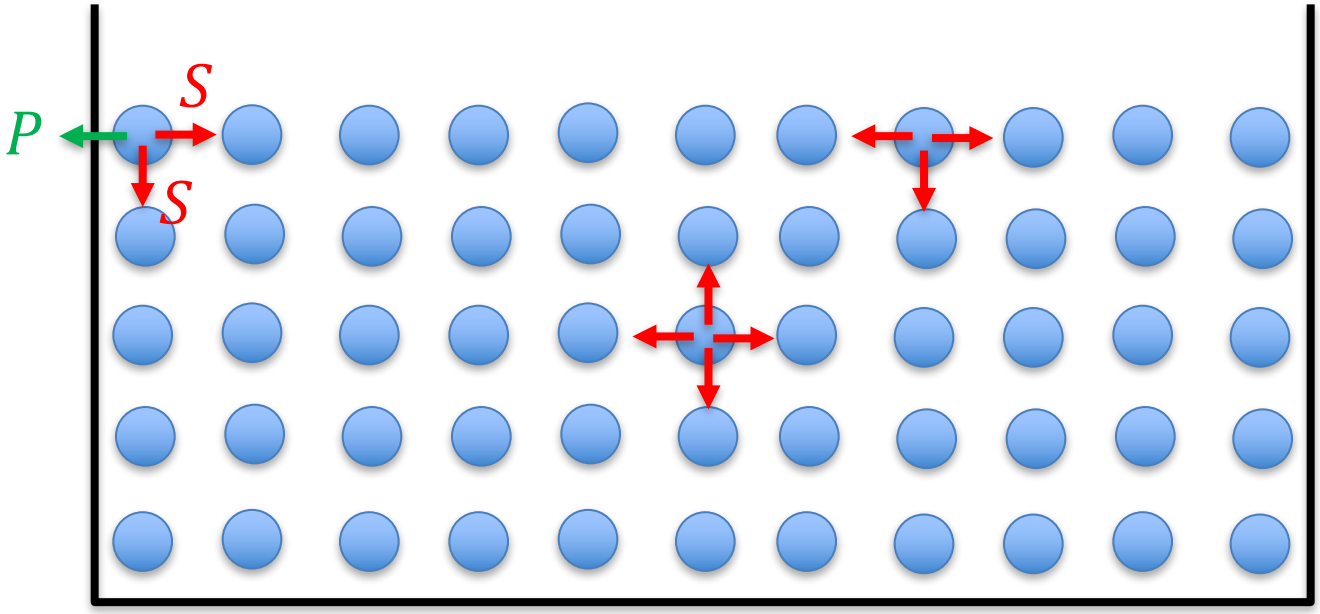
$$p = p_1 - h\,\gamma$$



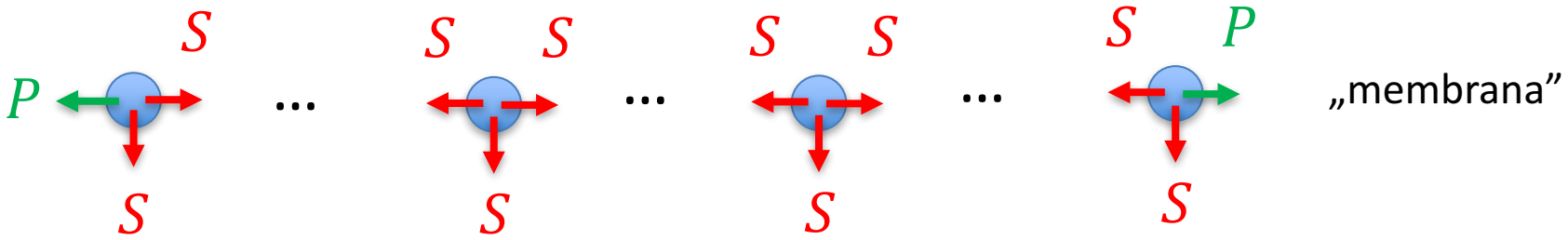
$$\frac{Q_1}{A_1} + h\gamma = \frac{Q_2}{A_2}$$

MECHANIKA PŁYNÓW

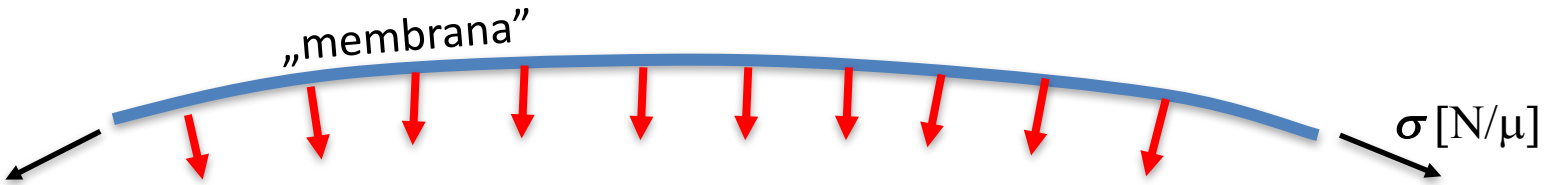
NAPIĘCIE POWIERZCHNIOWE



Siły:
S – spójności
P - przylegania



„membrana”



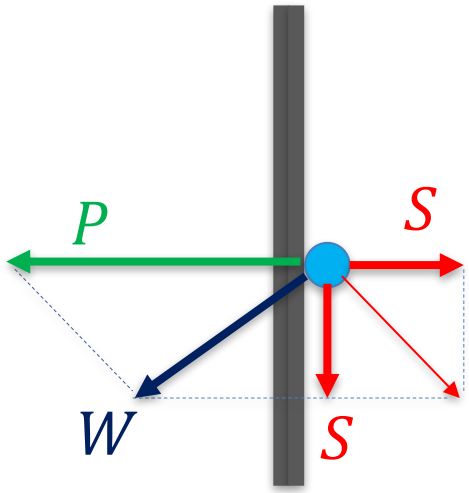
Siły powodujące napięcie powierzchniowe σ

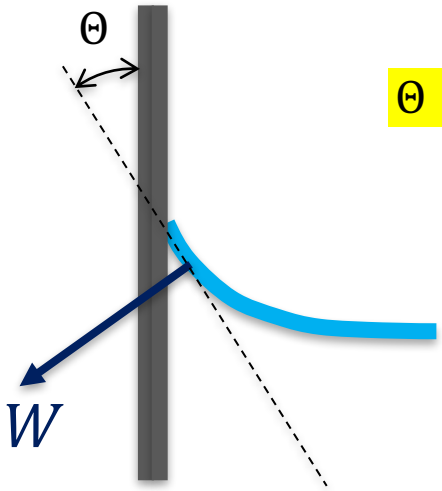
σ [N/m]

– napięcie powierzchniowe (siła przypadająca na jednostkę długości) powstałe w wyniku nierównowagi sił oddziaływania międzycząsteczkowego w warstwie zewnętrznej cieczy

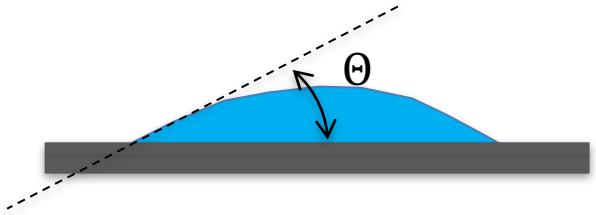
Wartość σ [N/m] zależy od rodzaju i parametrów cieczy:

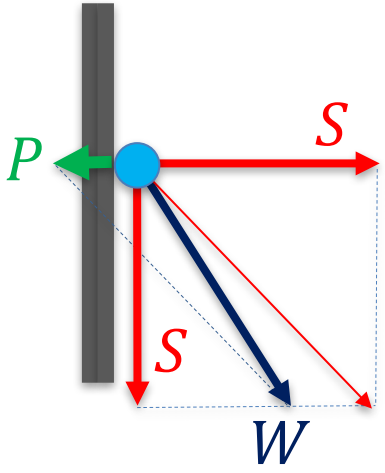
woda (20 ^{o}C)	0,073
woda (100 ^{o}C)	0,059
woda z mydłem (20 ^{o}C)	0,025
alkohol	0,022
rtęć	0,428

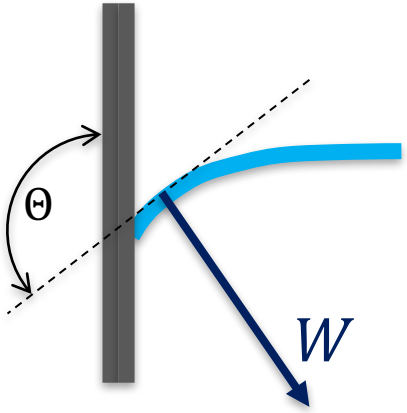


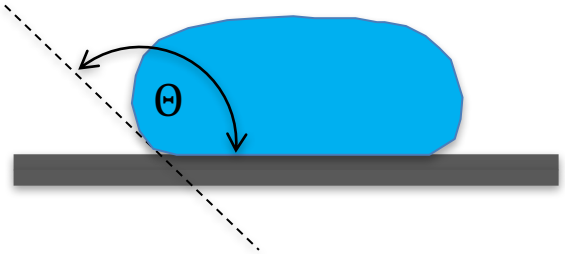


Θ < 90°

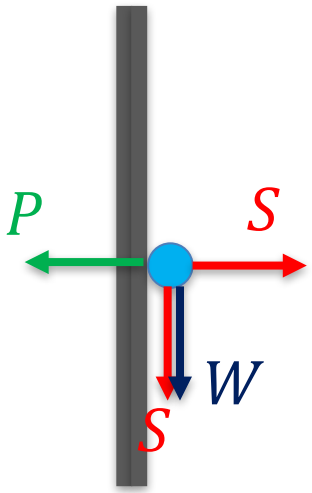


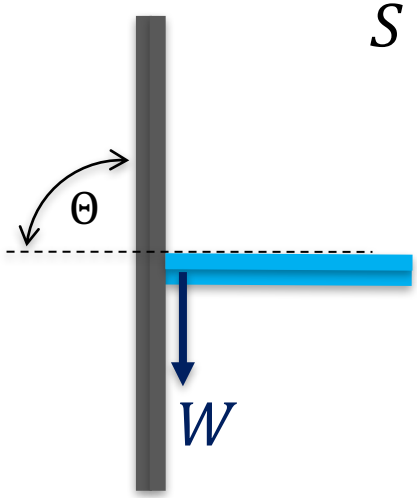




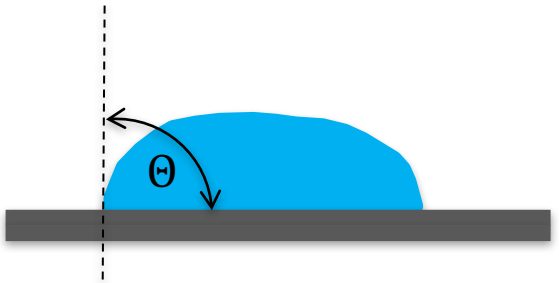


Θ > 90°





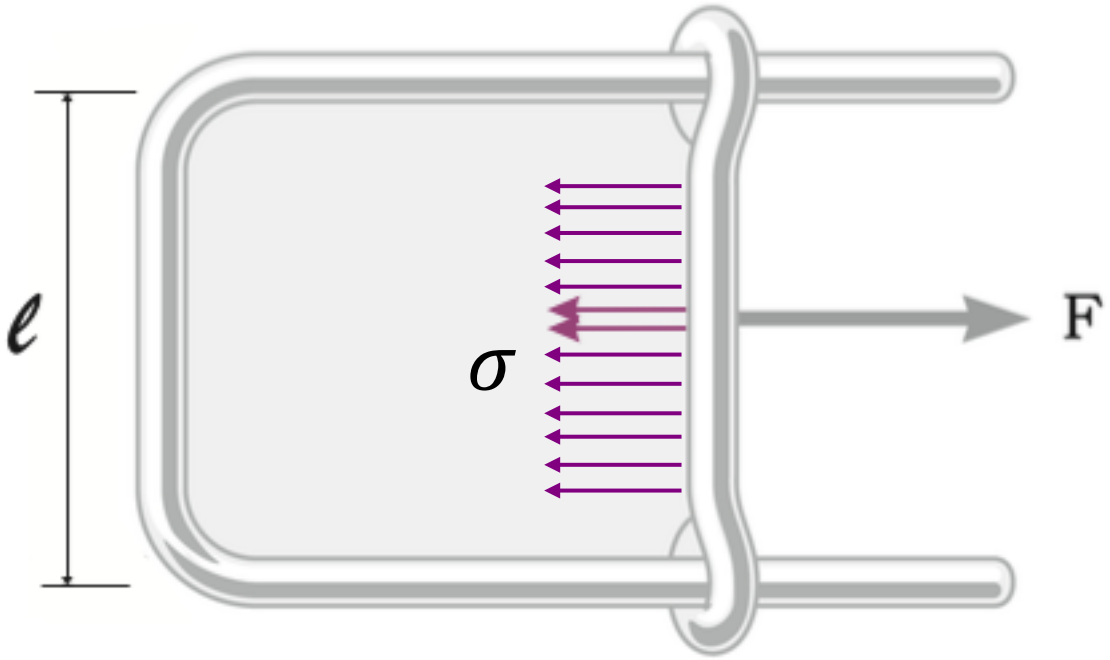
$S = P$ $\Theta = 90°$



Θ - **kąt zwilżania** : zależy od pary ciecz-ciało stałe

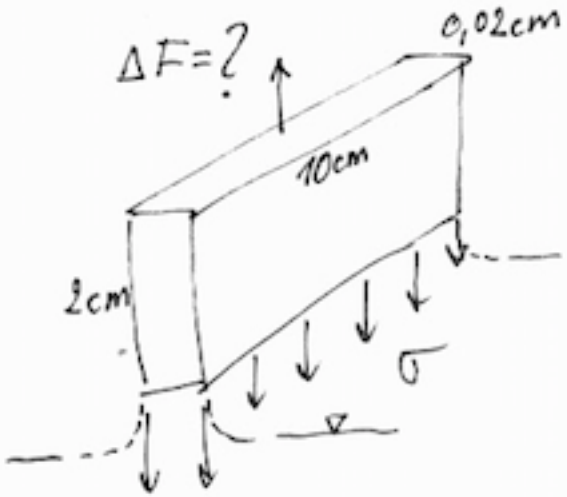
woda – stal	82°
woda – szkło	0° - 24° (zależy od stopnia zabrudzenia)
woda – parafina	107°
woda – srebro	90°
woda – teflon	160°
rtęć – szkło	140°





Siła zewnętrzna F równoważy siły napięcia powierzchniowego, jakimi ciecz działa na ruchomą poprzeczkę starając się skurczyć swą powierzchnię.

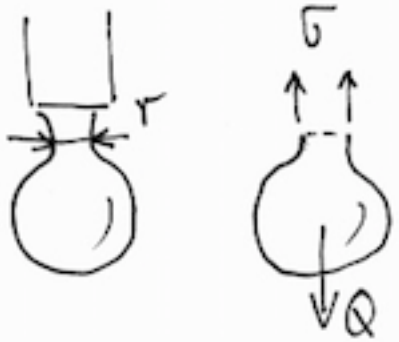
$$\sigma = F/l$$



szklana płytka / szkła

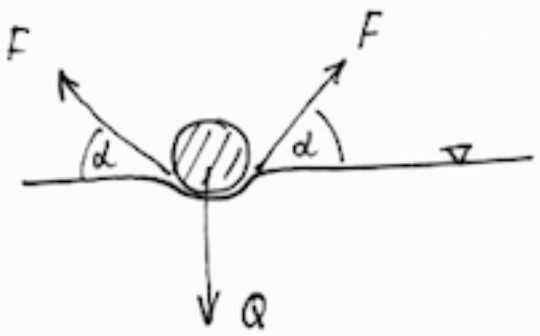
$\sigma = 0{,}0739\ [G/cm]$

$$\Delta F = 0{,}0739 \cdot (2 \cdot 10 + 2 \cdot 0{,}02) = 1{,}48\ G$$



kropla wody (ciężar)

$$Q = 2\pi r \cdot \sigma$$



igla stalova / voda

$\alpha = ?$

$\sigma = 0{,}0739\ (H_2O;\ 20°C)$

$d = 0{,}2\ cm$

$\gamma = 7{,}7\ G/cm^3$

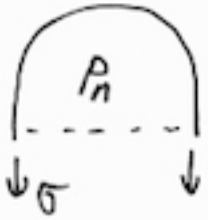
$F = \sigma \cdot 2L$

$Q = \gamma \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot L$

$2\sigma L \sin\alpha = \gamma \frac{\pi d^2}{4} L \quad \rightarrow \quad \alpha = 9{,}4°$

nadciśnienie w kropli cieczy





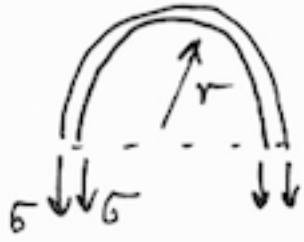
$$2\pi r \cdot \sigma = \pi r^2 \cdot p_n$$

$$p_n = \frac{2\sigma}{r}$$

---

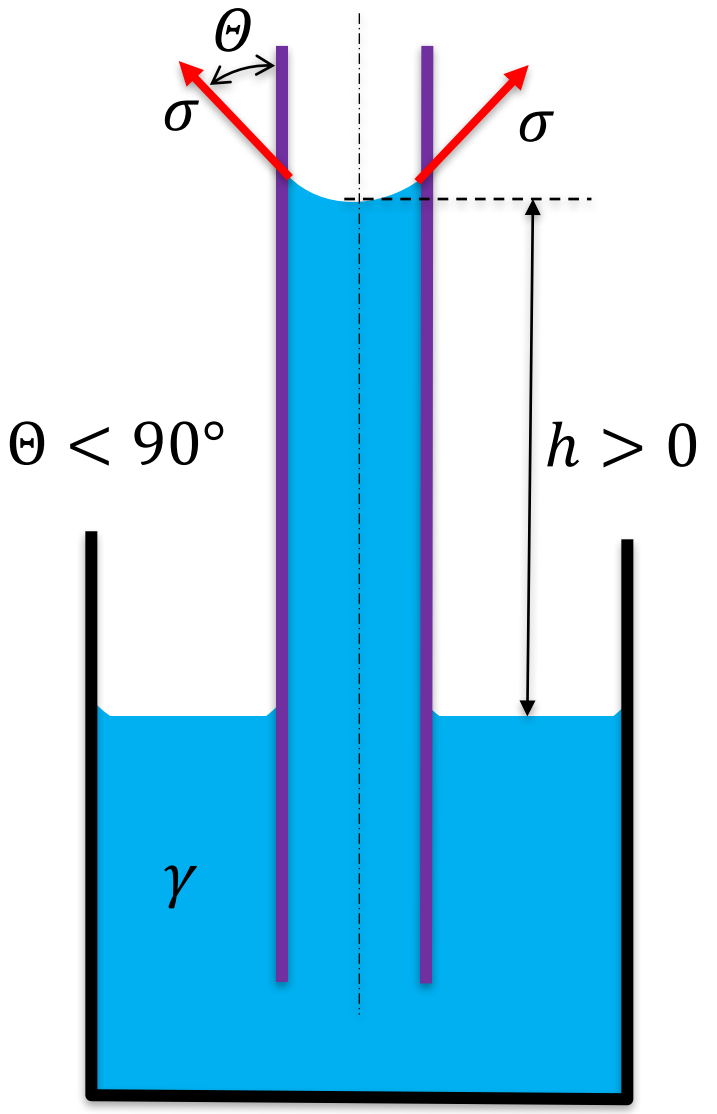
nadciśnienie w bańce powietrznej

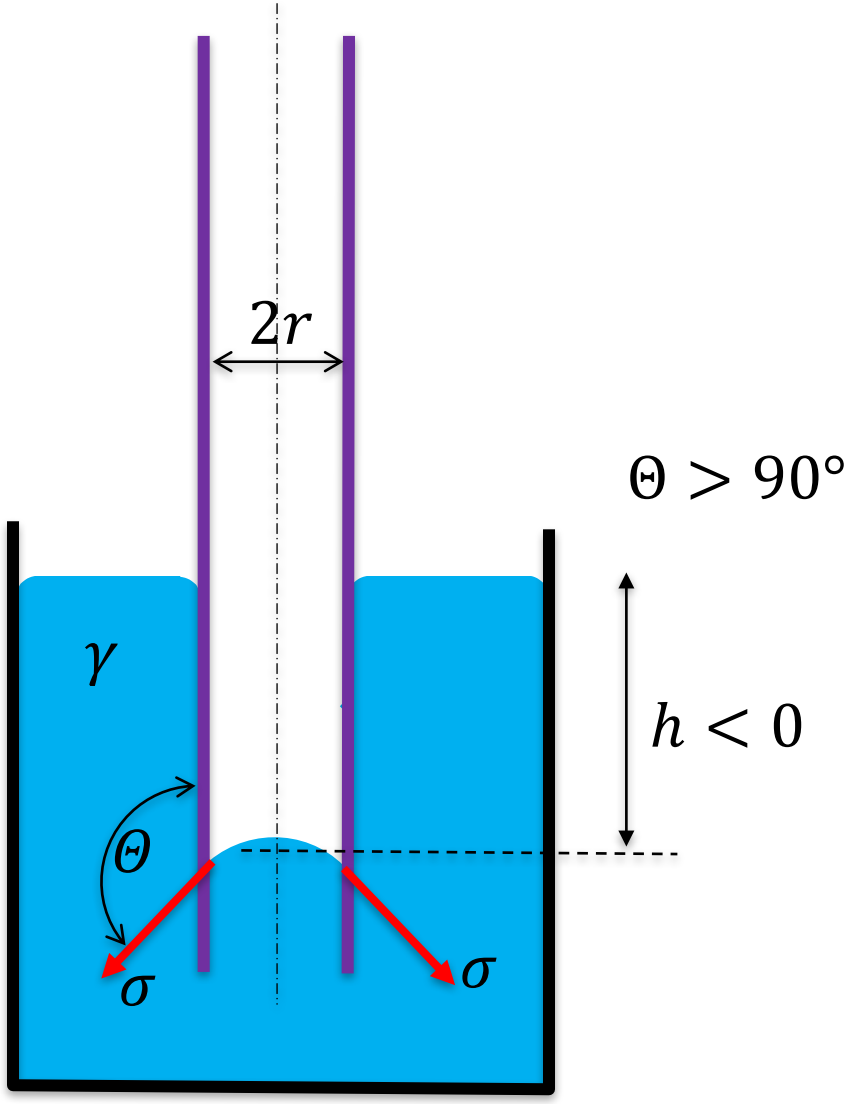




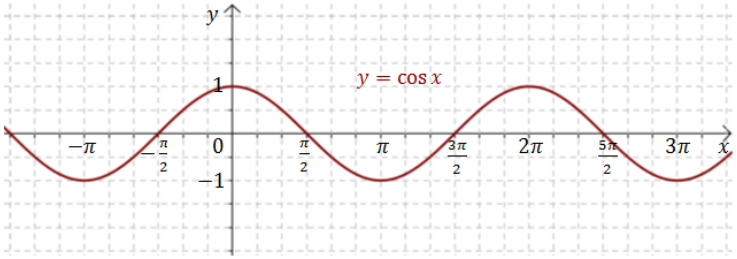
$$2 \cdot 2\pi r \cdot \sigma = \pi r^2 \cdot p_n$$

$$p_n = \frac{4\sigma}{r}$$





$$2\pi r\sigma\cos\Theta = h\gamma\pi r^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{2\sigma\cos\Theta}{\gamma r}$$



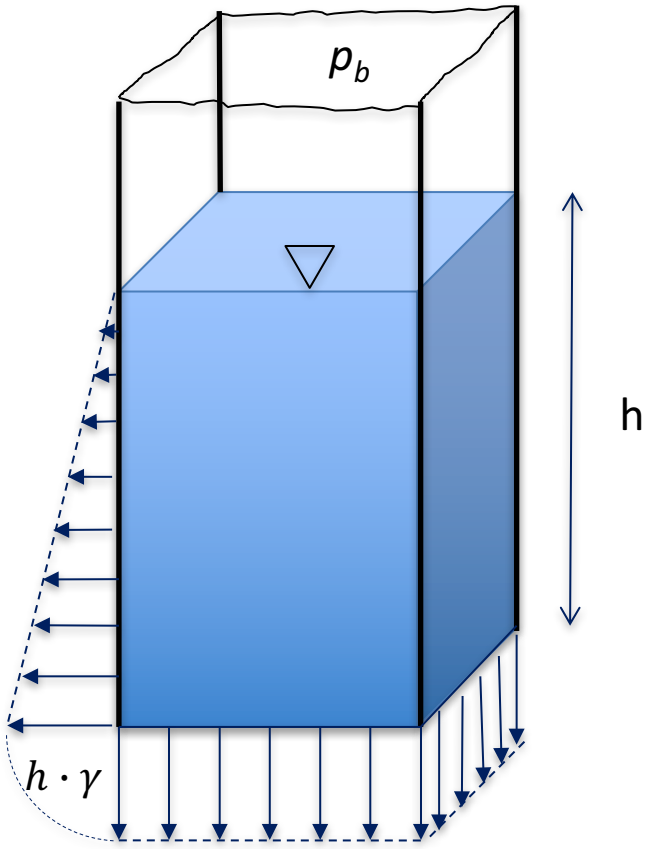
MECHANIKA PŁYNÓW

NAPÓR
na
POWIERZCHNIE PŁASKIE i ZAKRZYWIONE

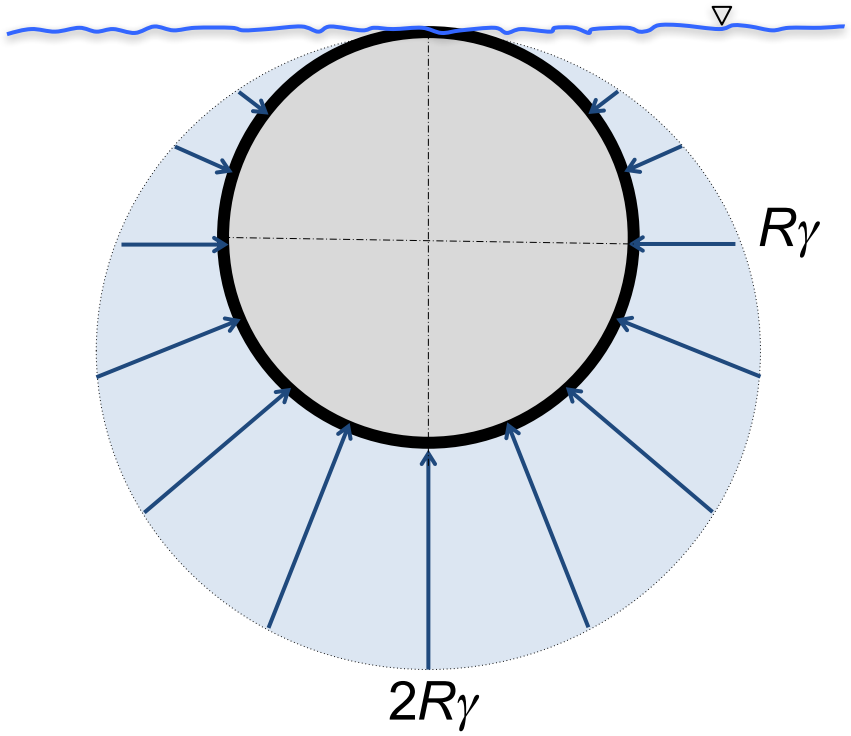
Ciśnienie hydrostatyczne

$$Q = abh \cdot \gamma$$

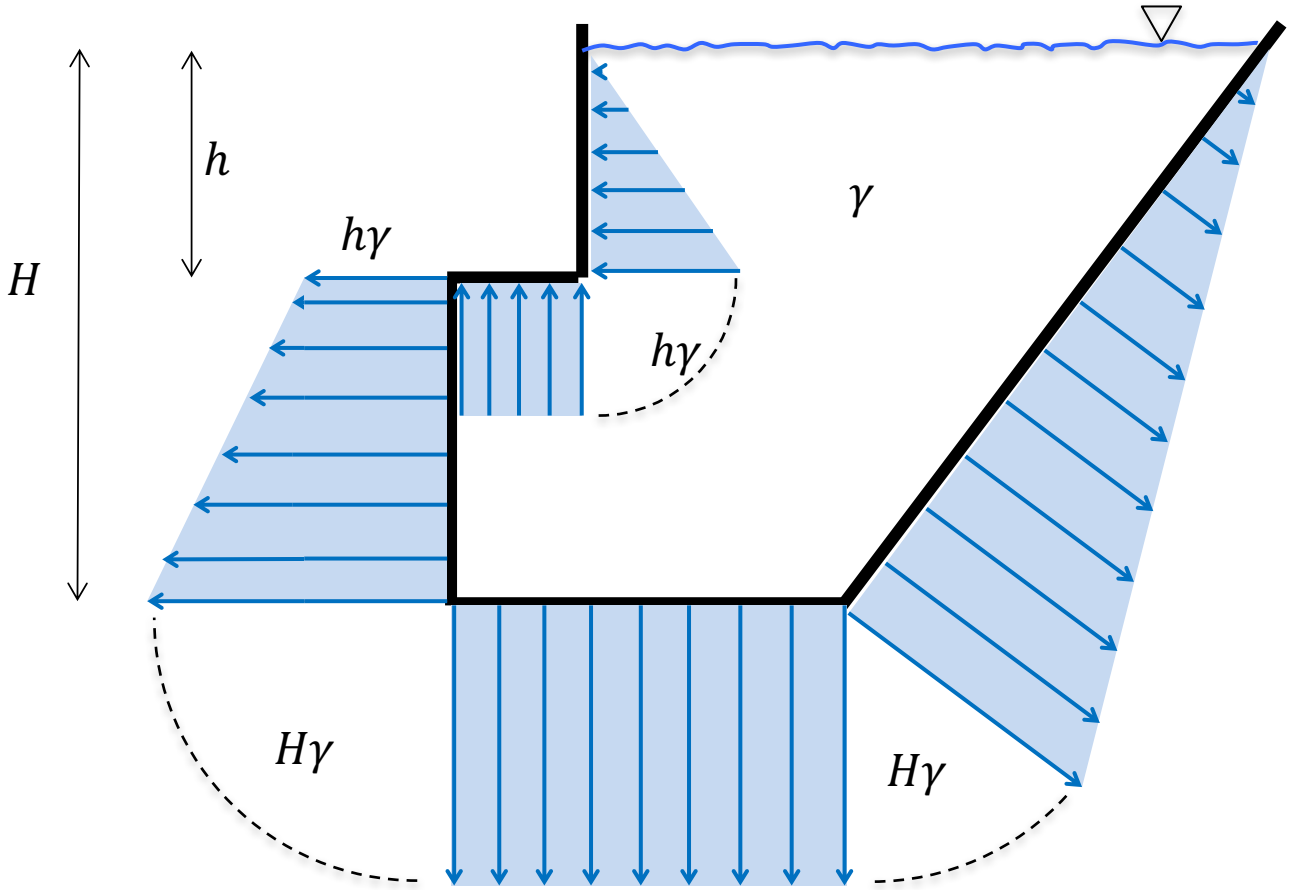
$$ciśnienie\ hydrostatyczne = \frac{Q}{ab} = h \cdot \gamma$$



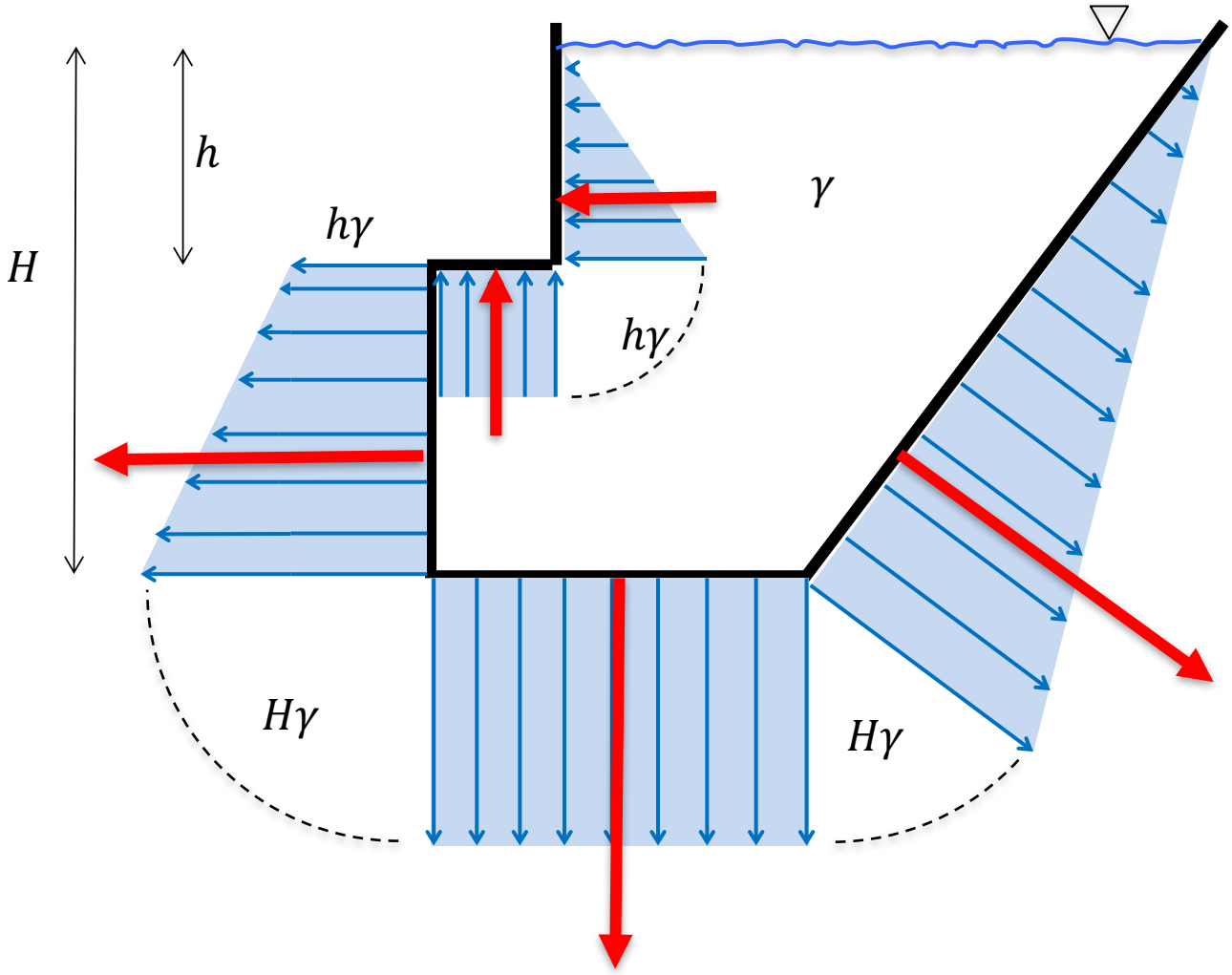
Rozkład ciśnienia hydrostatycznego

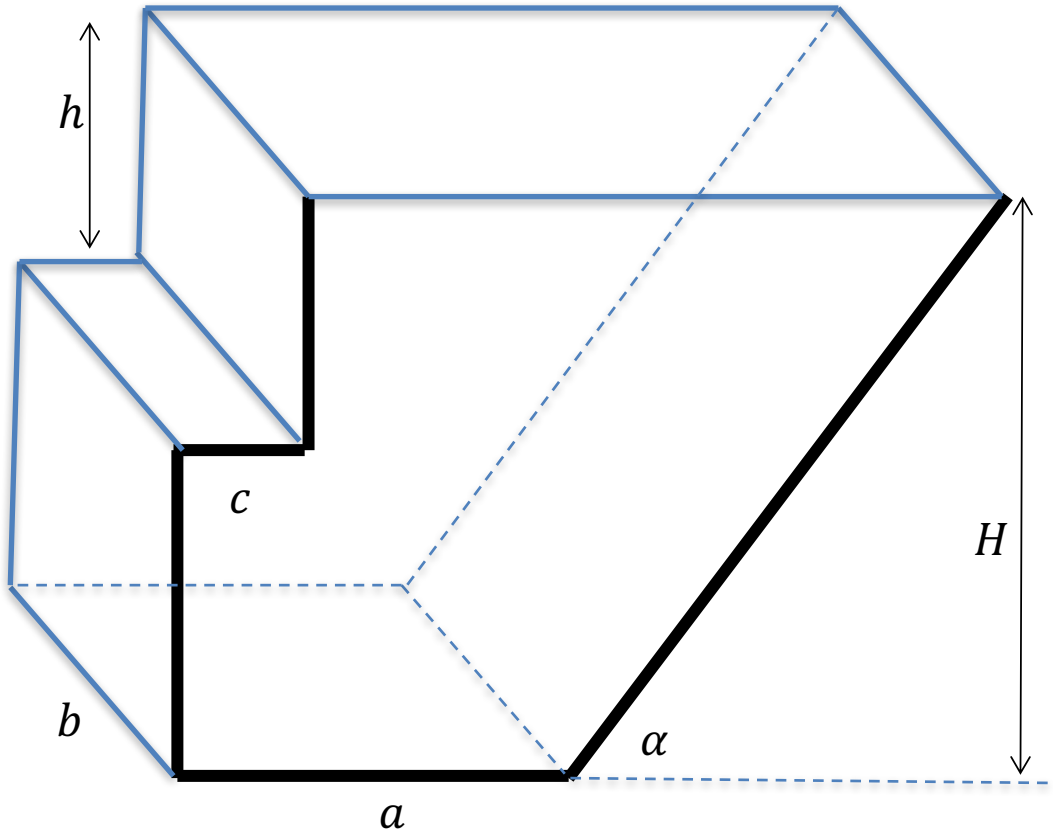


Rozkład ciśnienia hydrostatycznego

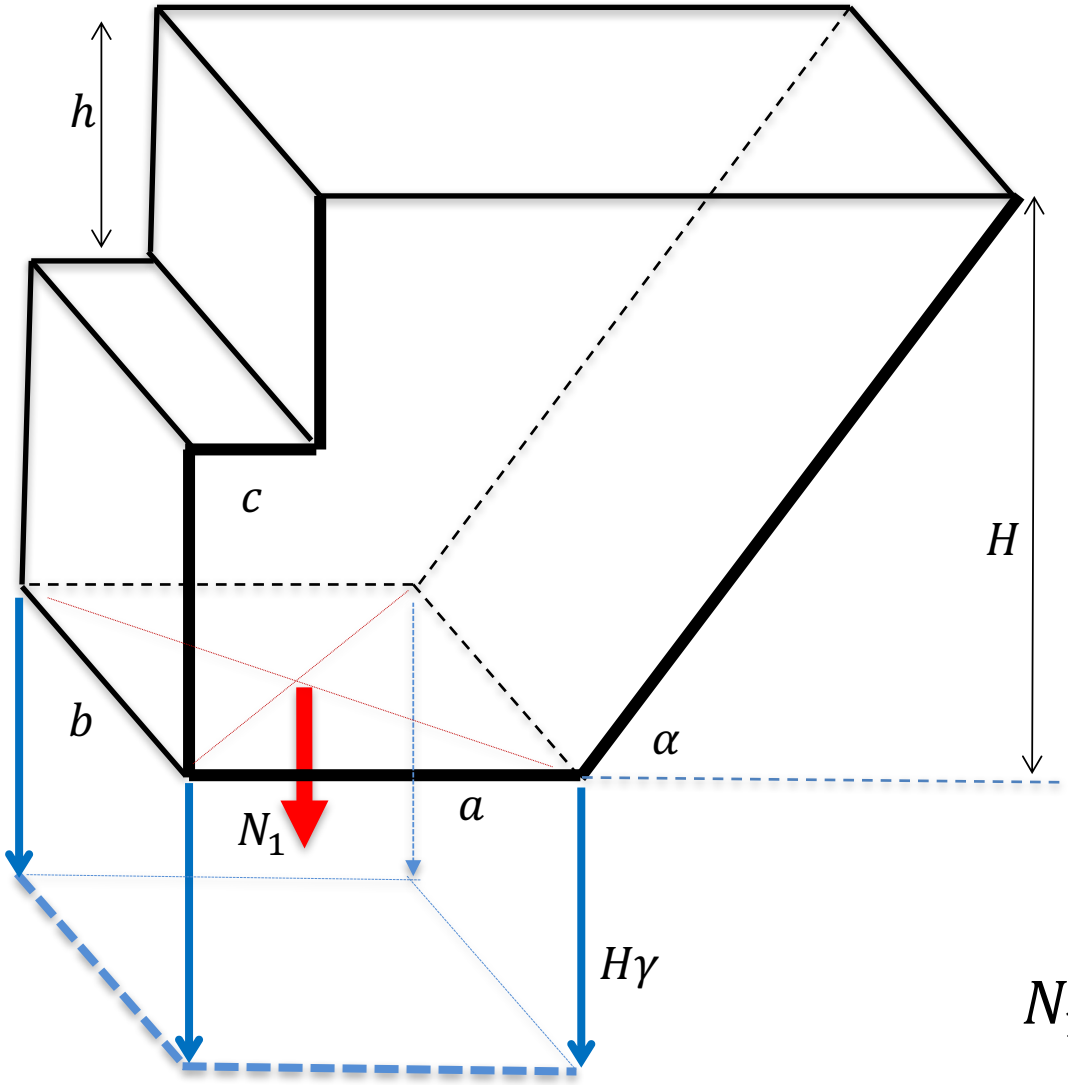


Rozkład ciśnienia hydrostatycznego



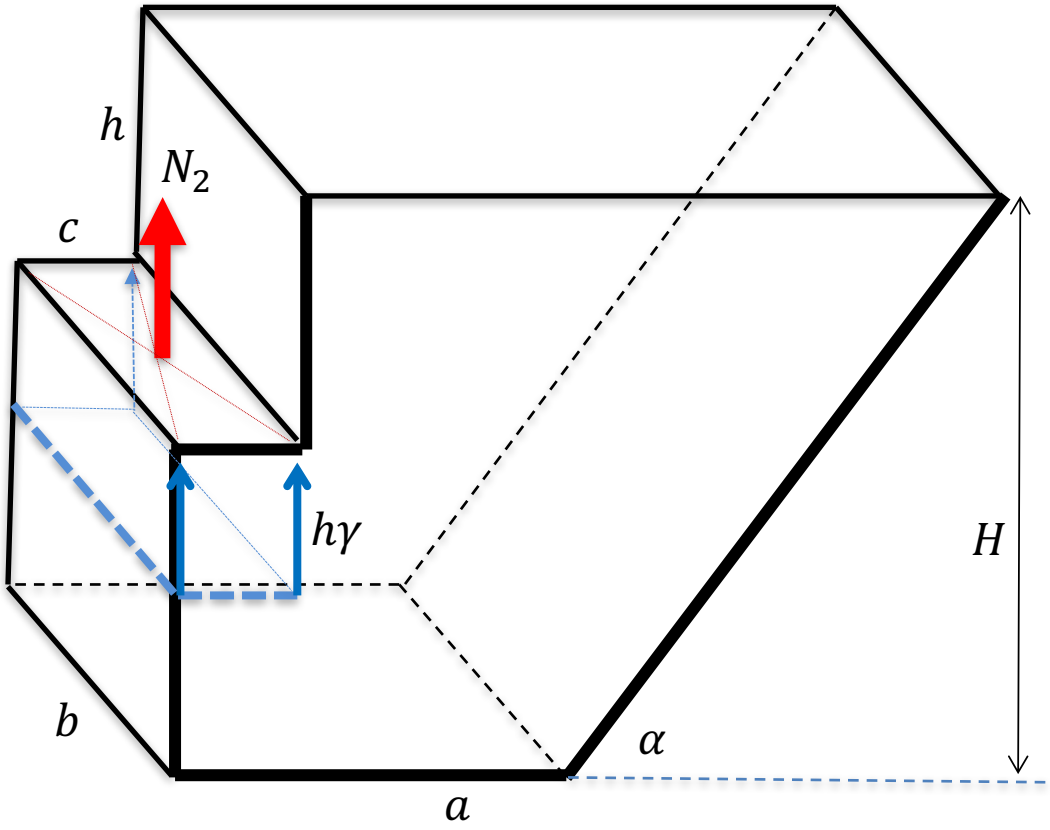

h
c
H
b
α
a

1



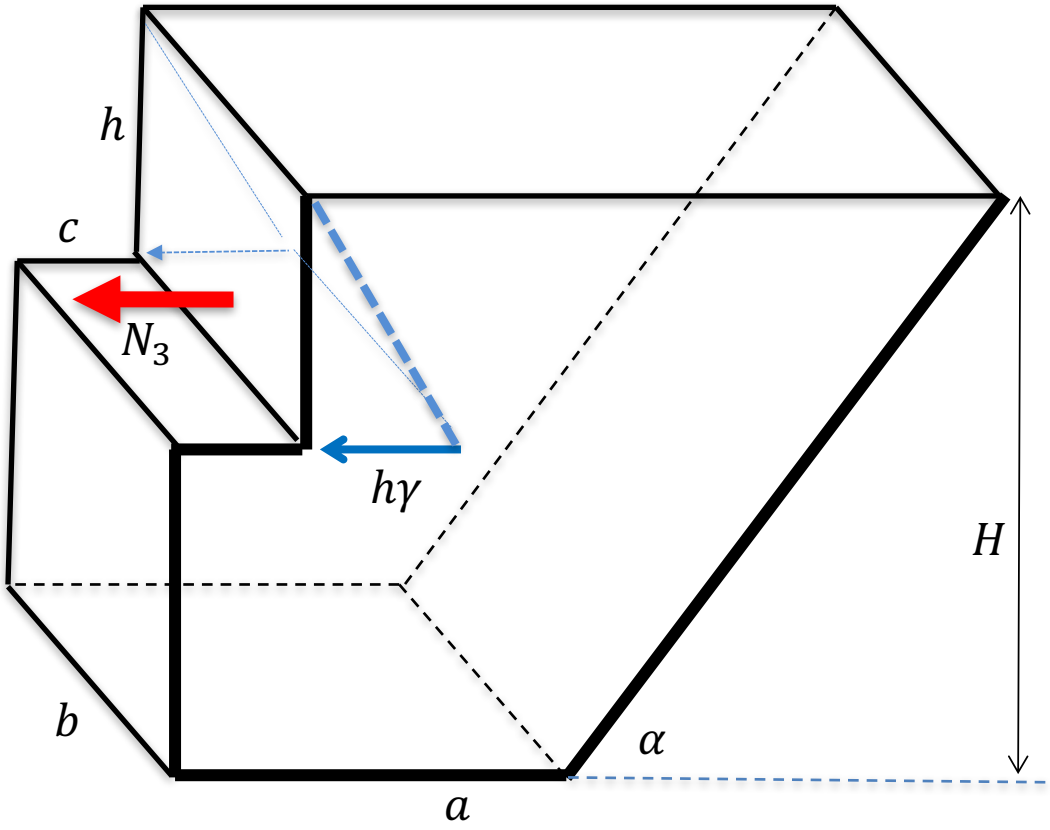
$$N_1 = abH\gamma$$

1

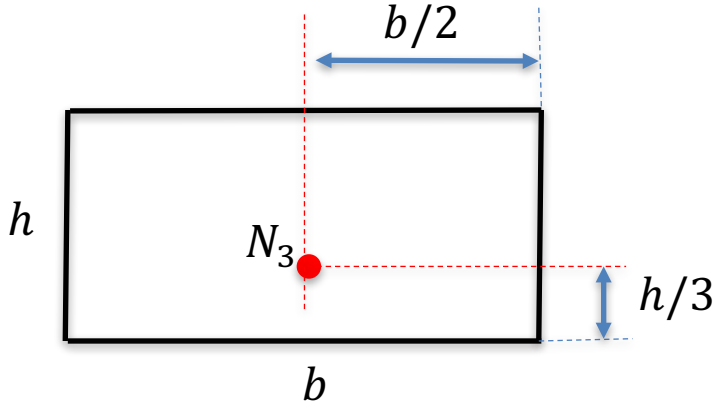


$$N_2 = cbh\gamma$$

1

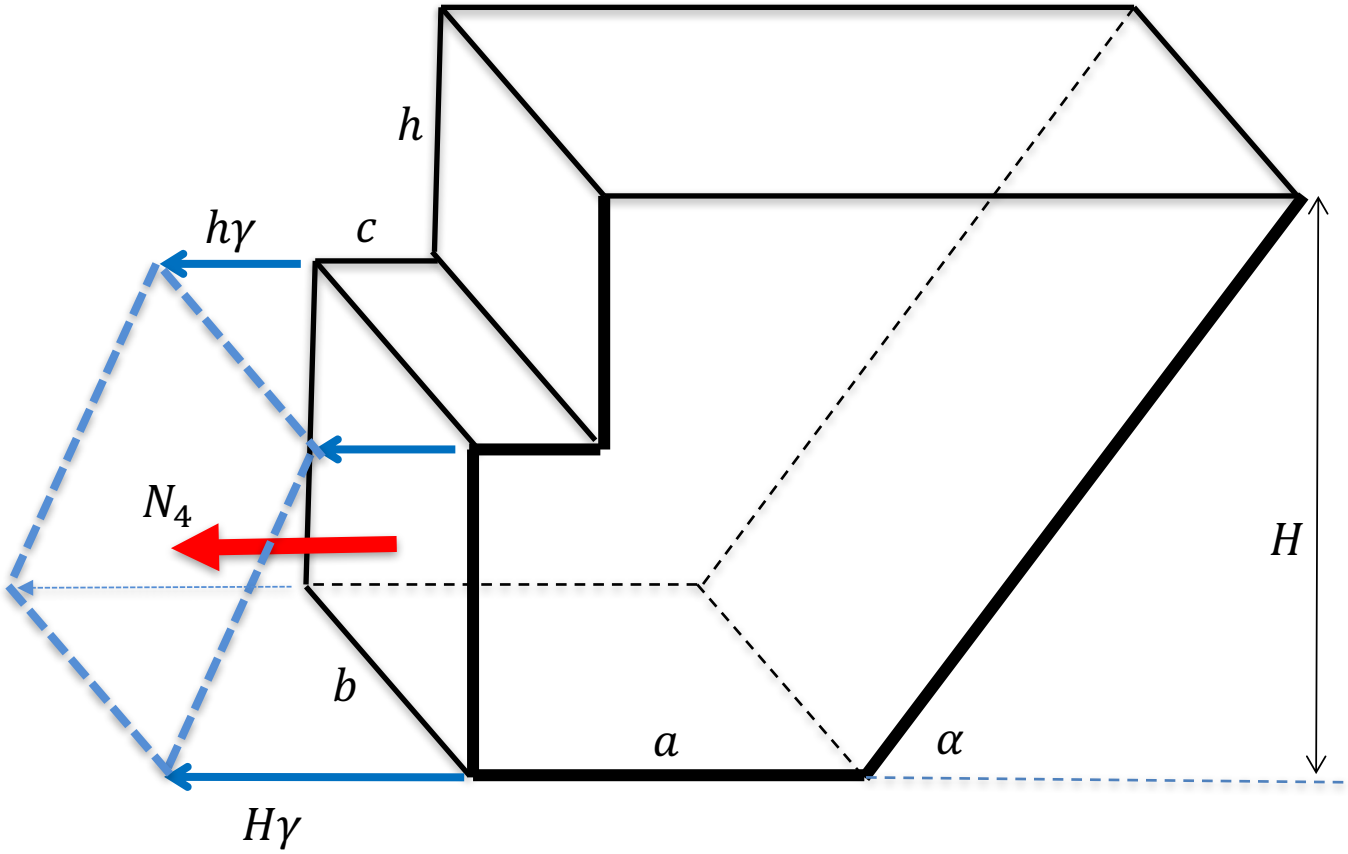


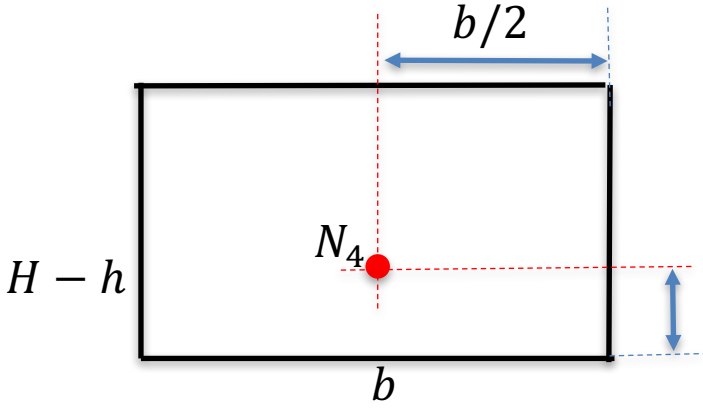
$$N_3 = b\frac{1}{2}hh\gamma$$



1

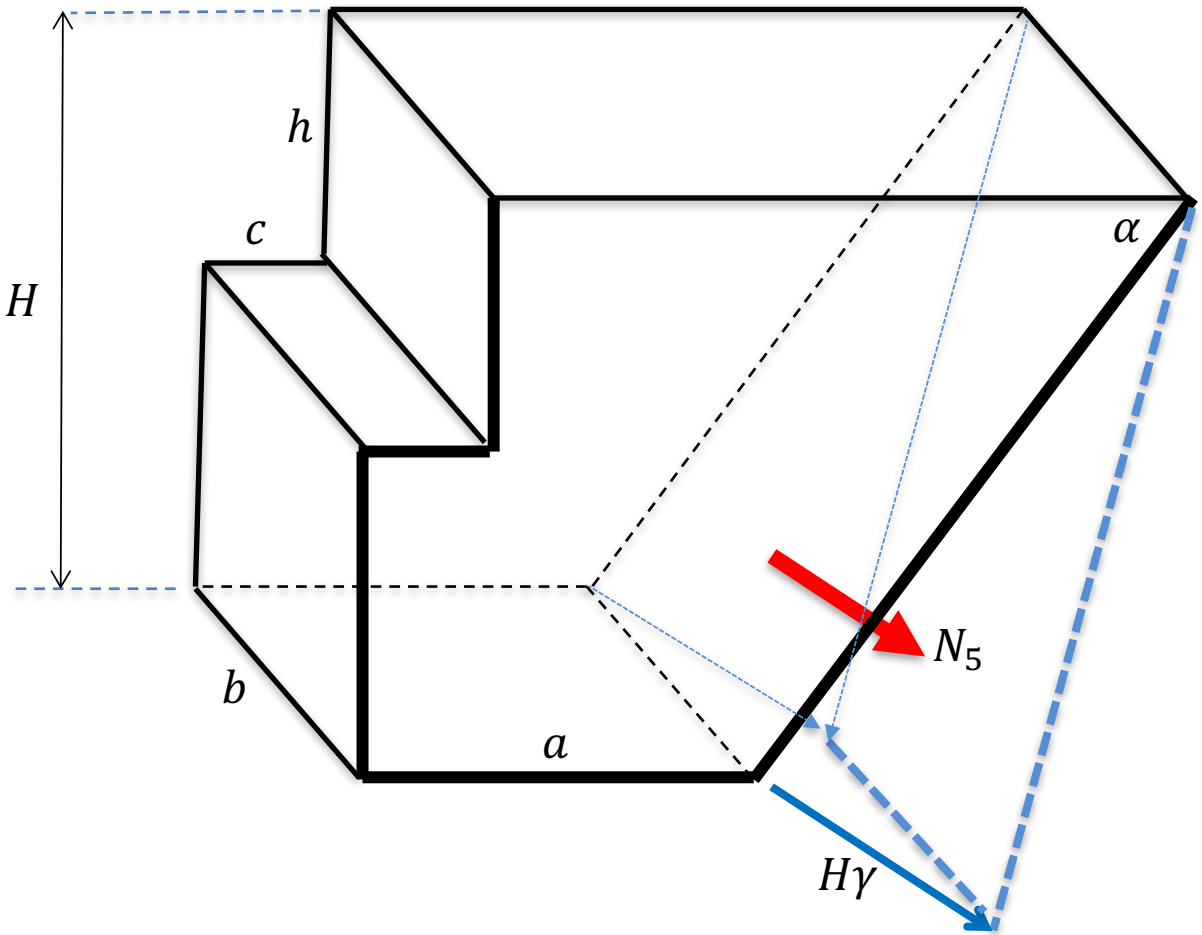
$$N_4 = b(H-h)\frac{1}{2}(H+h)\gamma$$

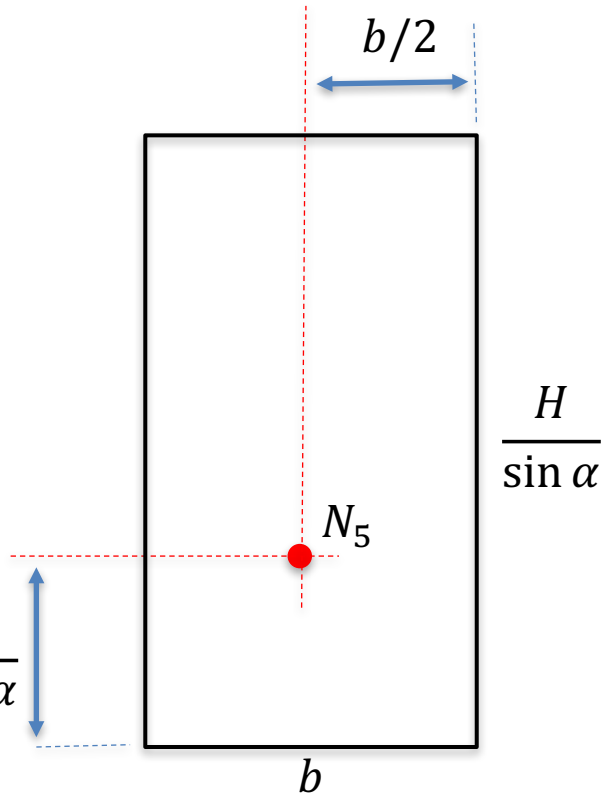




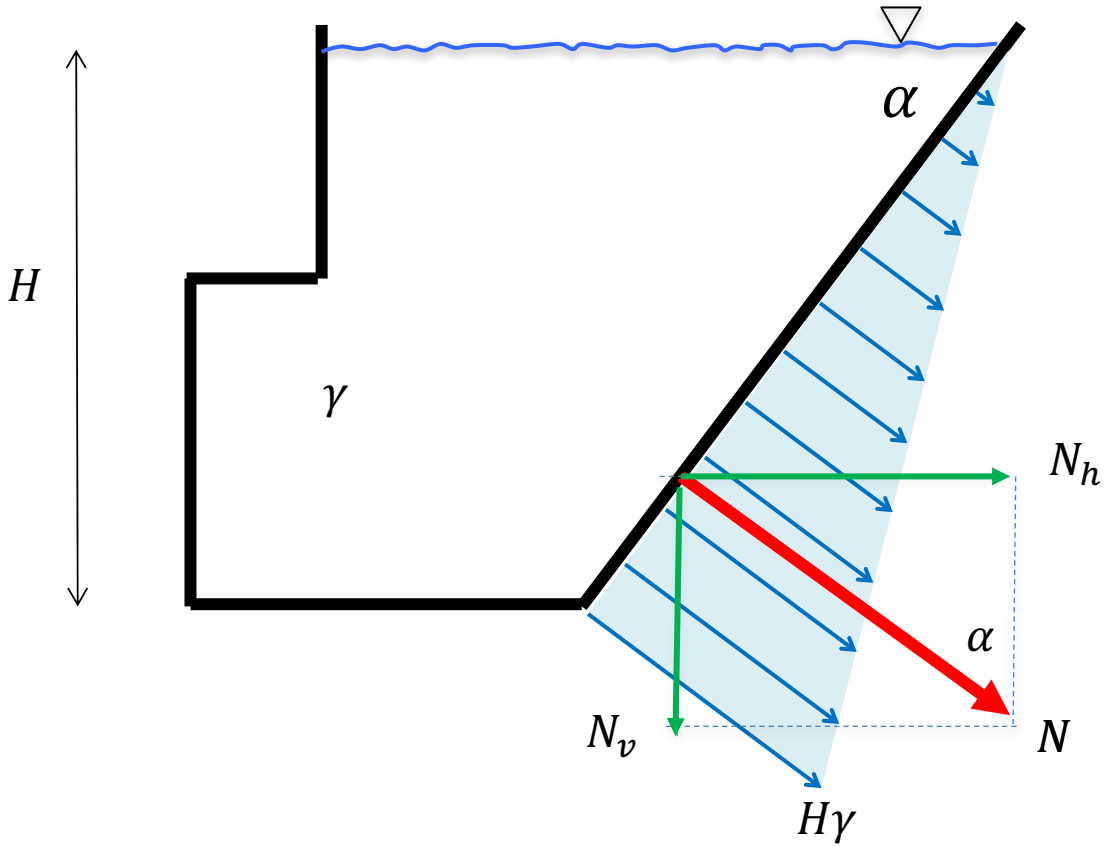
$$\frac{(2h+H)(H-h)}{(H+h)3}$$

1





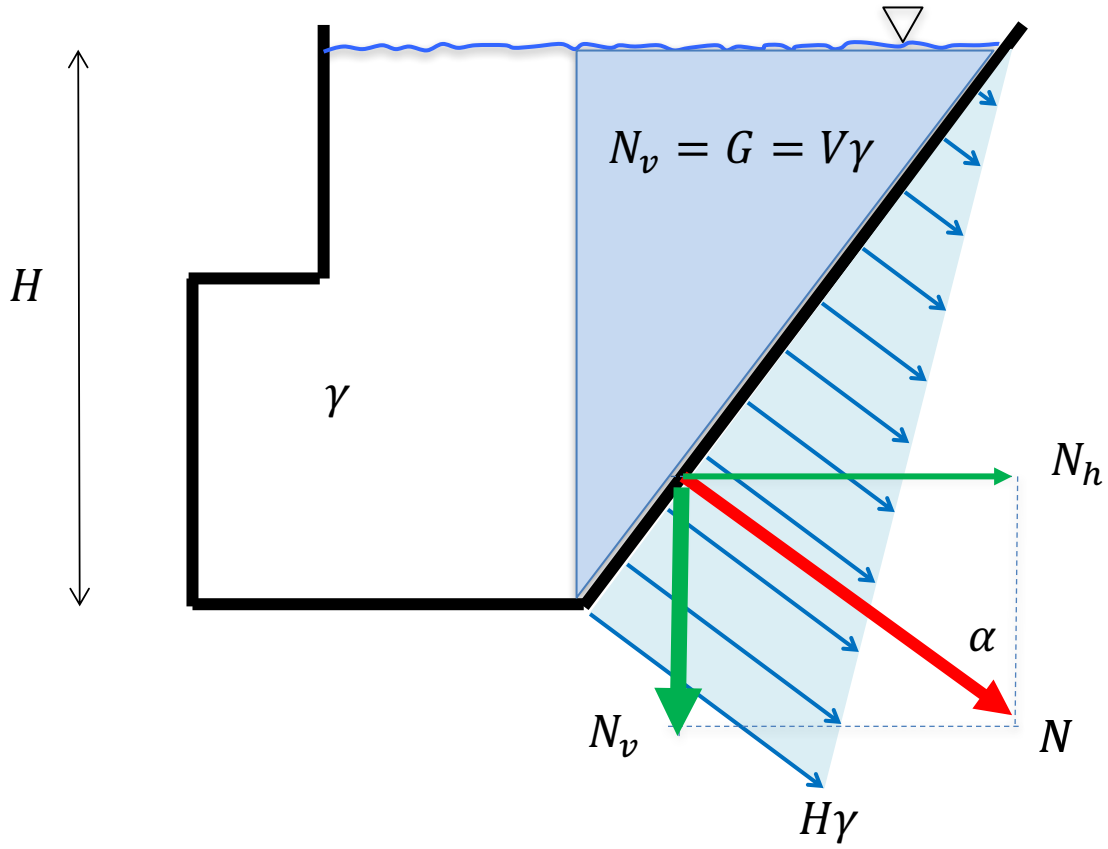
$$N_5 = \frac{1}{2}\frac{H}{\sin\alpha}H\gamma b$$



$$N_h = N \sin\alpha = \frac{1}{2} HH\gamma b$$

$$N = \frac{1}{2}\frac{H}{\sin\alpha} H\gamma b$$

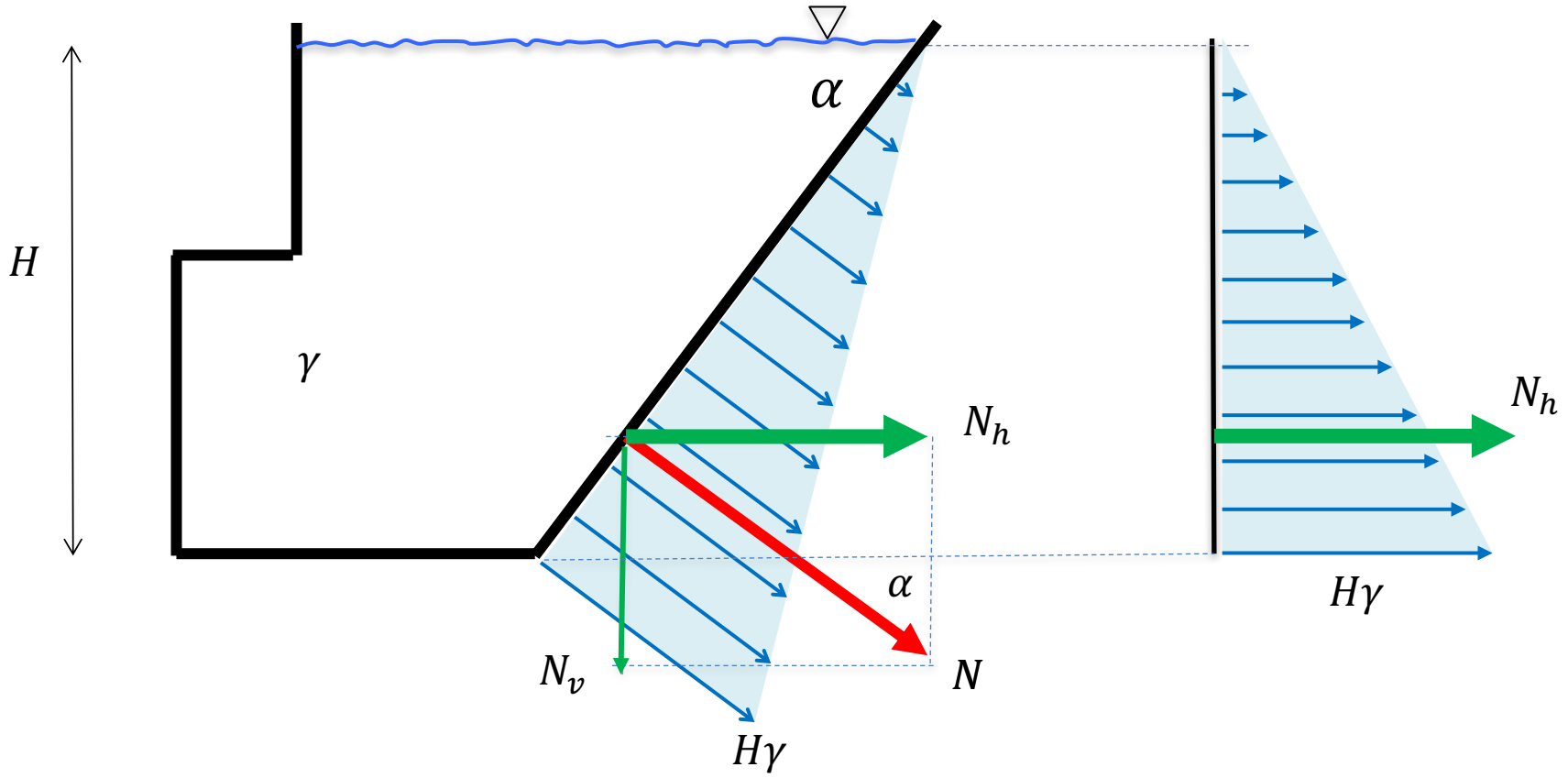
$$N_v = N \cos\alpha = \gamma b \frac{1}{2} HH \cot\alpha$$



$$N = \frac{1}{2}\frac{H}{\sin\alpha}H\gamma b$$

$$N_v = N\cos\alpha = \gamma b\frac{1}{2}HH\cot\alpha = \textit{ciężar cieczy nad powierzchnią}$$

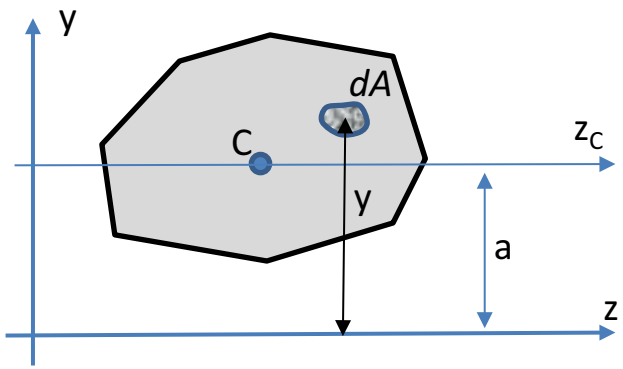
$$N_h = N\sin\alpha = \frac{1}{2}HH\gamma b$$



$$N = \frac{1}{2}\frac{H}{\sin\alpha}H\gamma b$$

$$N_v = N\cos\alpha = \gamma b\frac{1}{2}HH\cot\alpha = ciężar\ cieczy\ nad\ powierzchnią$$

$$N_h = N\sin\alpha = \frac{1}{2}HH\gamma b = napór\ na\ rzut\ powierzchni\ na\ płaszczyznę\ ponową$$



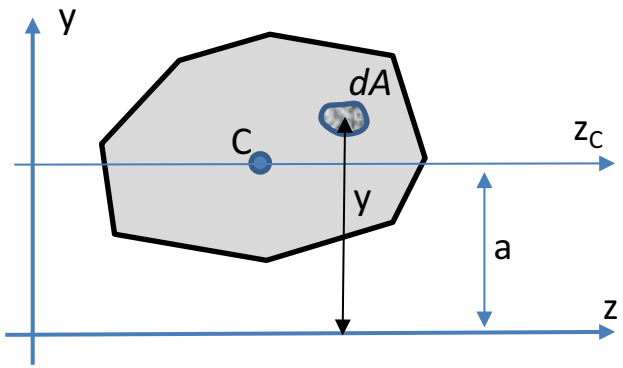
Moment statyczny $S_z = \int_A y\, dA = a\, A$

$S_{zc} = 0$

Moment bezwładności

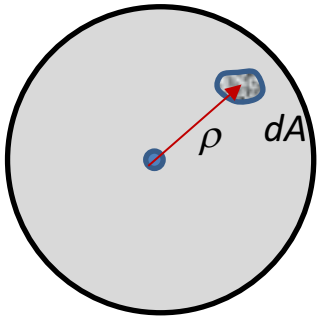
$$J_z = \int_A y^2\, dA$$

$$J_z = J_{z_c} + A\, a^2$$



Biegunowy moment bezwładności

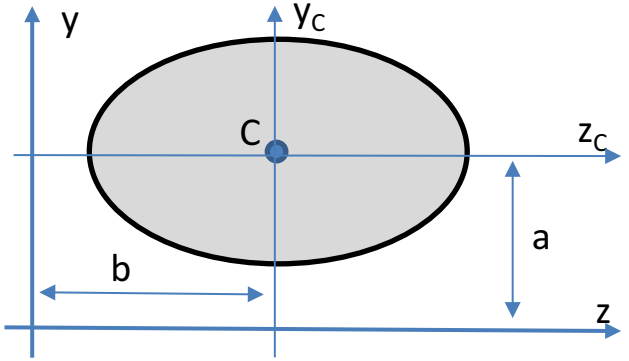
$$J_0 = \int_A \rho^2\, dA$$



$$J_{yz} = \int_F yz\, dA$$

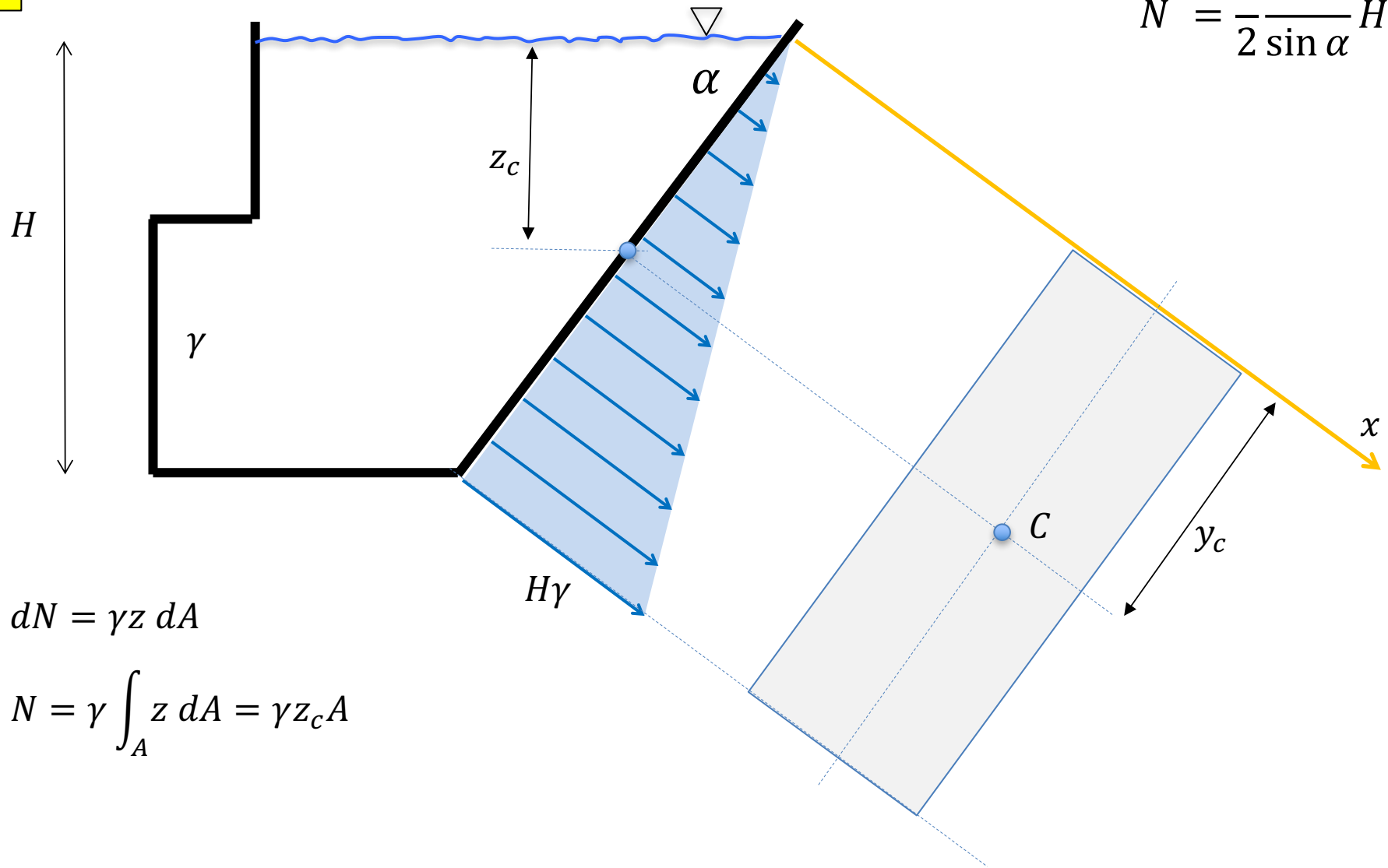
$$J_{yz} = J_{y_c z_c} + A\, ab$$

Moment odśrodkowy



3

$$N = \frac{1}{2}\frac{H}{\sin\alpha}H\gamma b$$



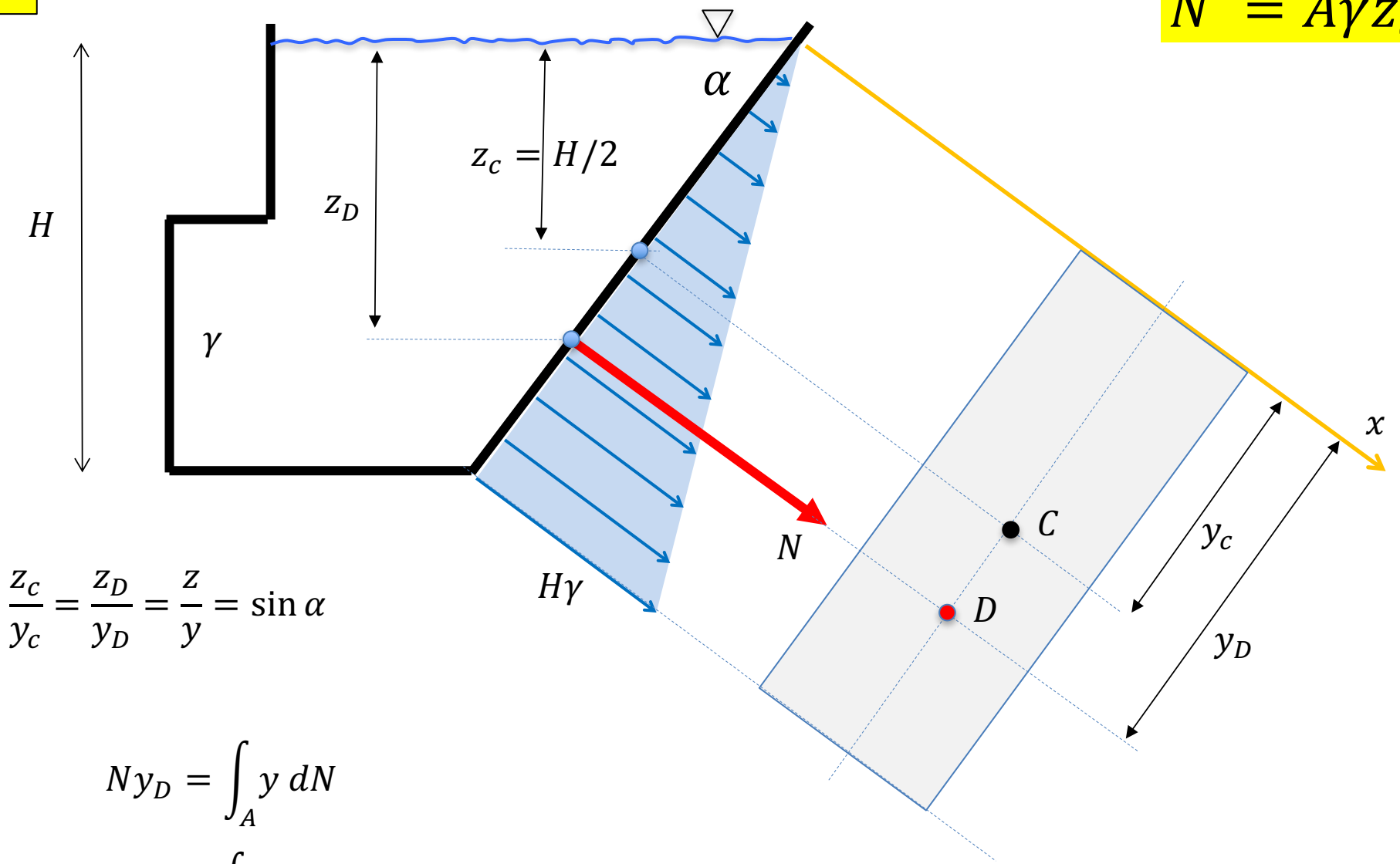
$$dN = \gamma z\, dA$$

$$N = \gamma \int_A z\, dA = \gamma z_c A$$

$$N = A\gamma z_c$$

3

$$N = A\gamma z_c$$



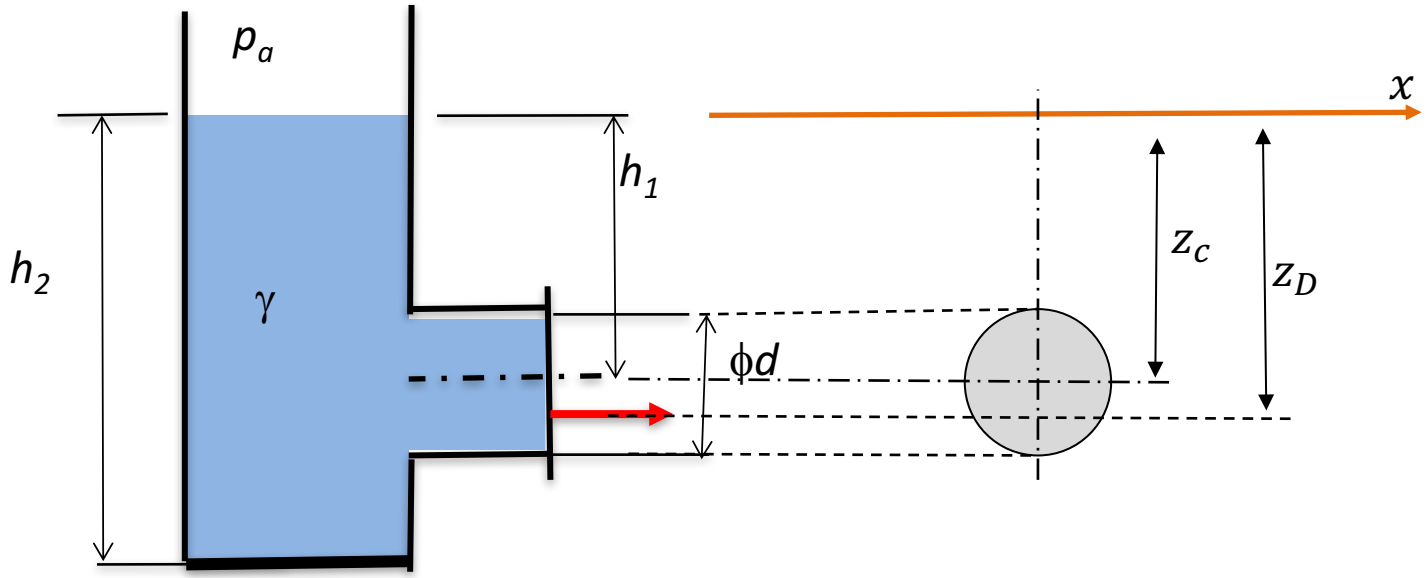
$$\frac{z_c}{y_c} = \frac{z_D}{y_D} = \frac{z}{y} = \sin\alpha$$

$$Ny_D = \int_A y\, dN$$

$$(\gamma z_c A)y_D = \int_A y(\gamma z\, dA)$$

$$z_c A y_D = \int_A yz\, dA \qquad y_c A y_D = \int_A y^2\, dA$$

$$y_D = \frac{J_x}{A\, y_c}$$



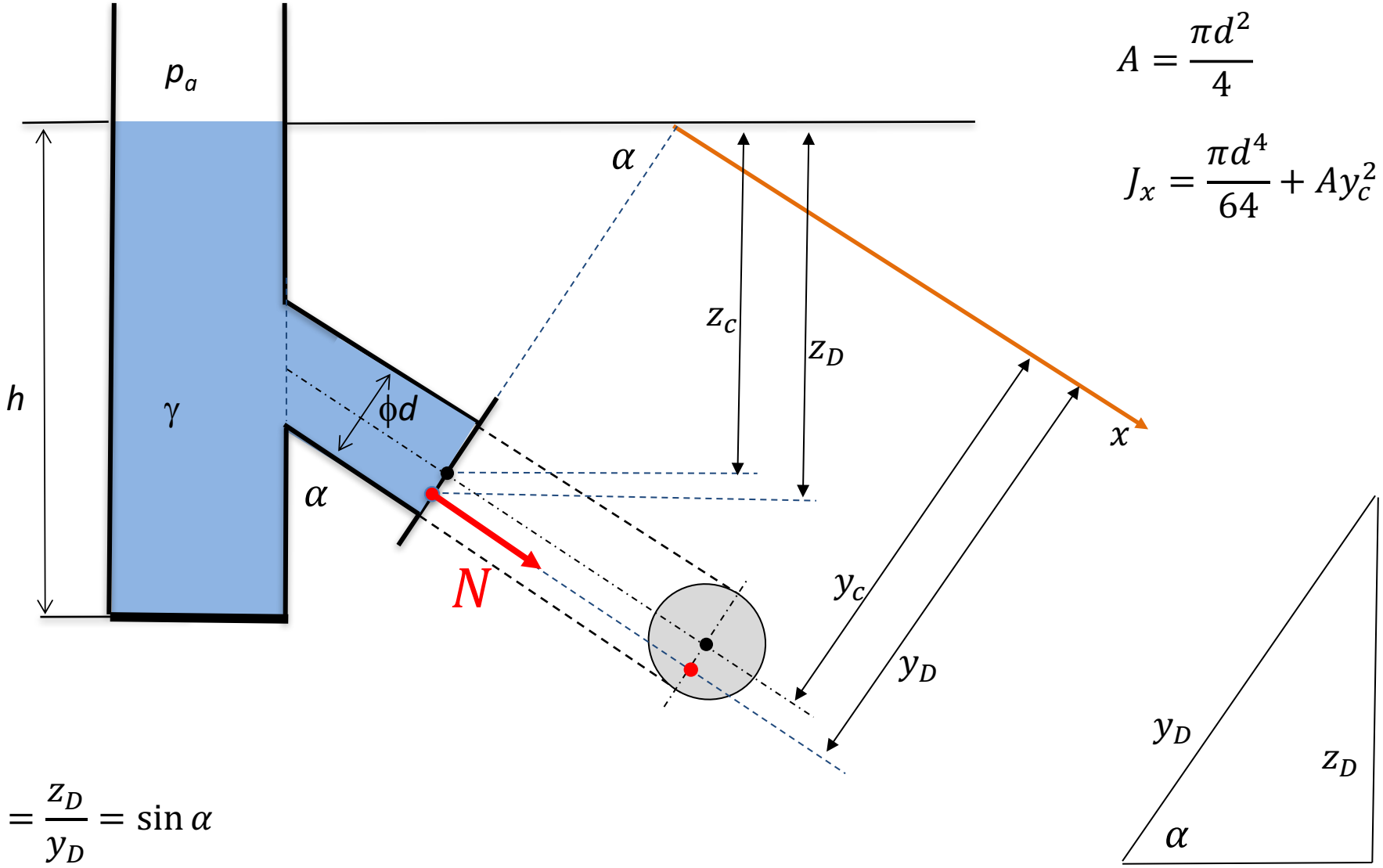
$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$z_c = h_1$$

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} + A h_1^2$$

$$N = A\gamma z_c$$

$$y_D = z_D = \frac{J_x}{A\,(y_c = z_c)}$$



$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

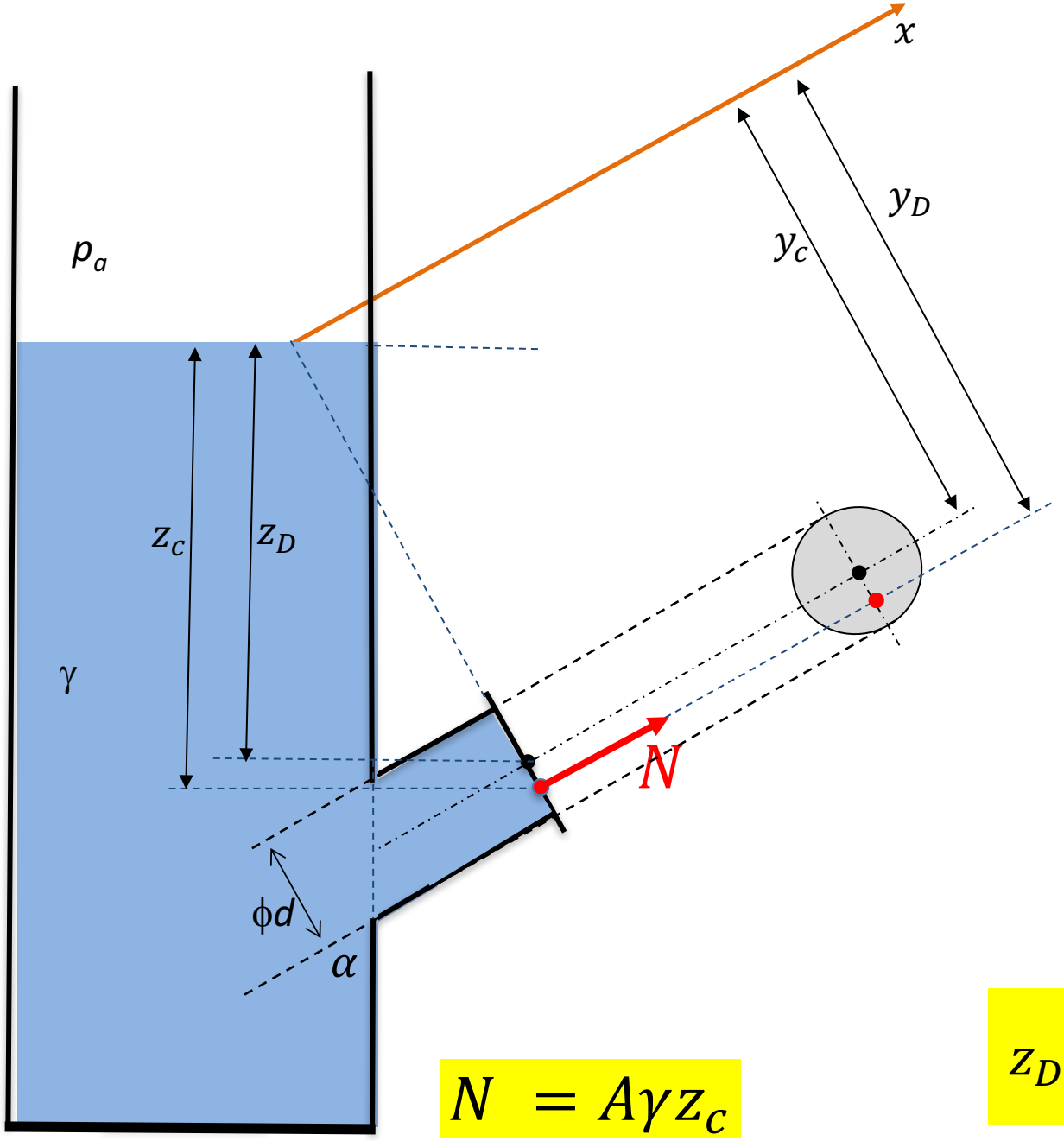
$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} + A y_c^2$$

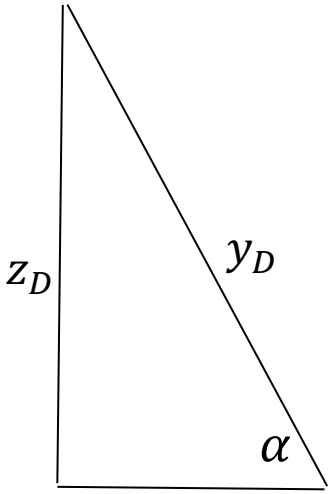
$$\frac{z_c}{y_c} = \frac{z_D}{y_D} = \sin\alpha$$

$$N = A\gamma z_c$$

$$y_D = \frac{J_x}{A\, y_c}$$

$$z_D = z_c + \frac{J_{xc}}{A\, z_c}(\sin\alpha)^2$$



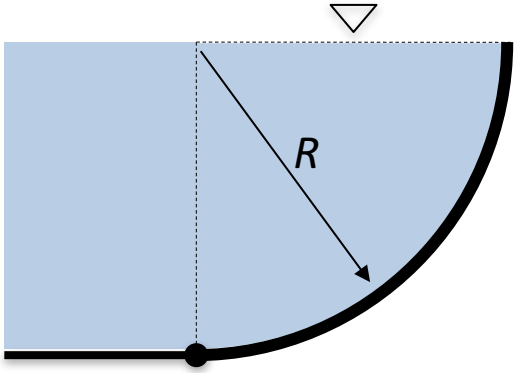


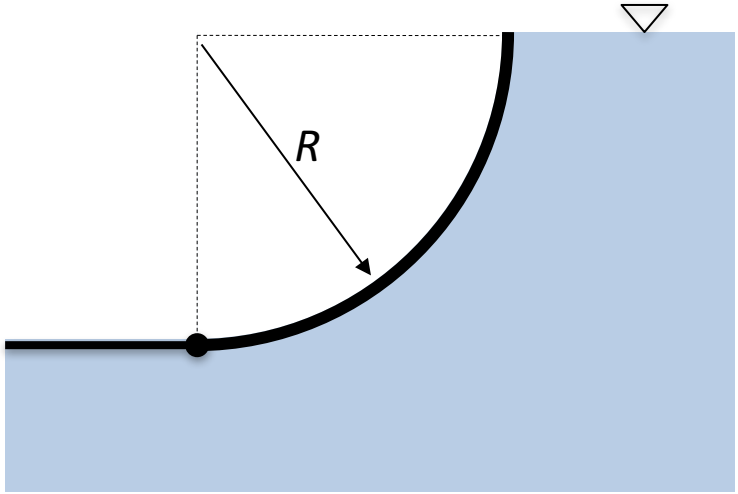
$$\frac{z_c}{y_c} = \frac{z_D}{y_D} = \sin\alpha$$

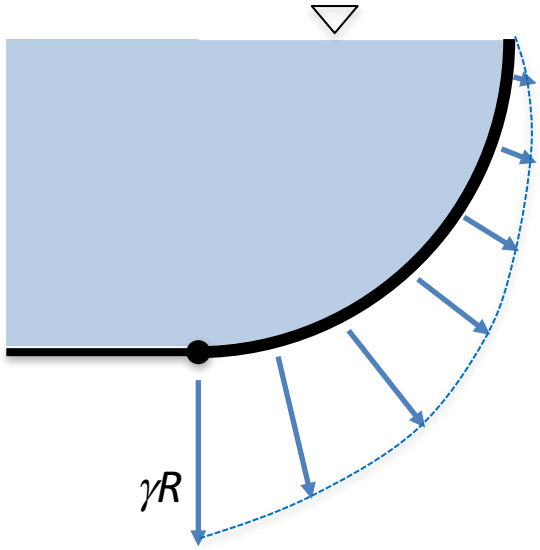
$$y_D = \frac{J_x}{A\, y_c}$$

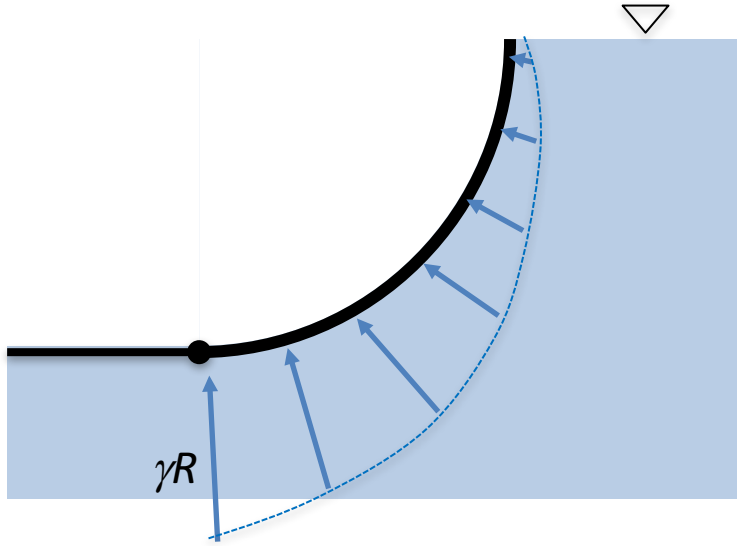
$$N = A\gamma z_c$$

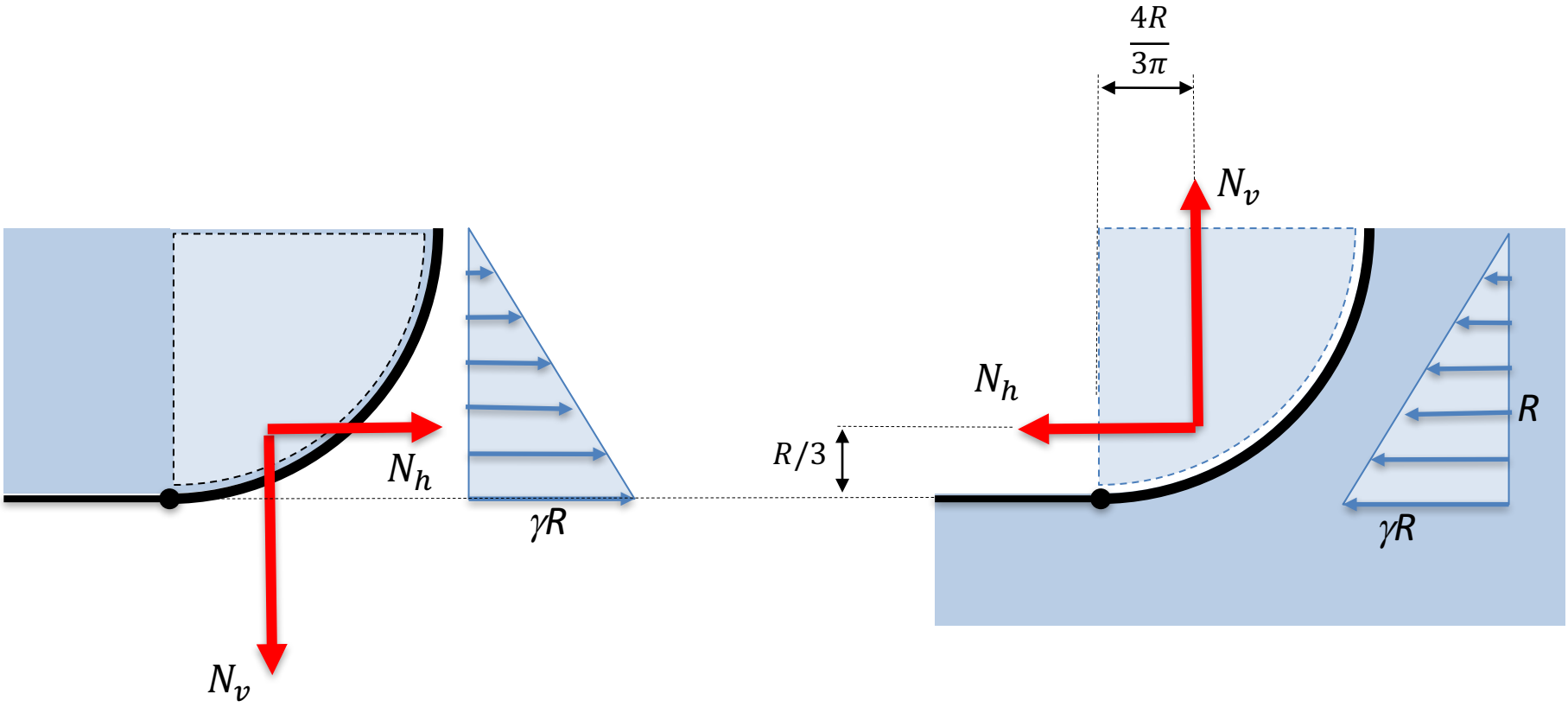
$$z_D = z_c + \frac{J_{xc}}{A\, z_c}(\sin\alpha)^2$$


R


R

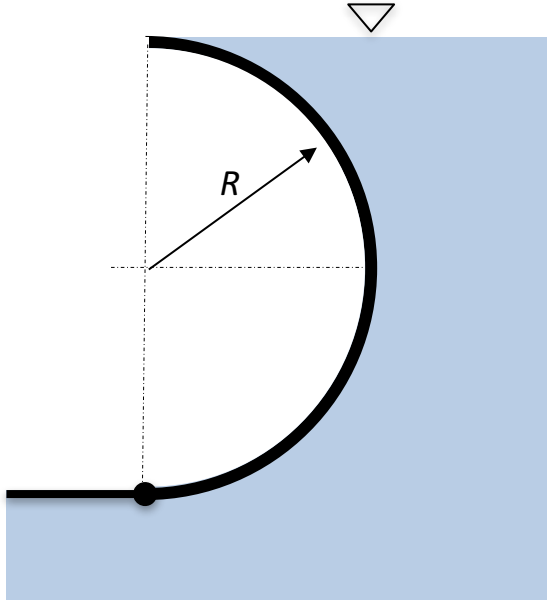

γR

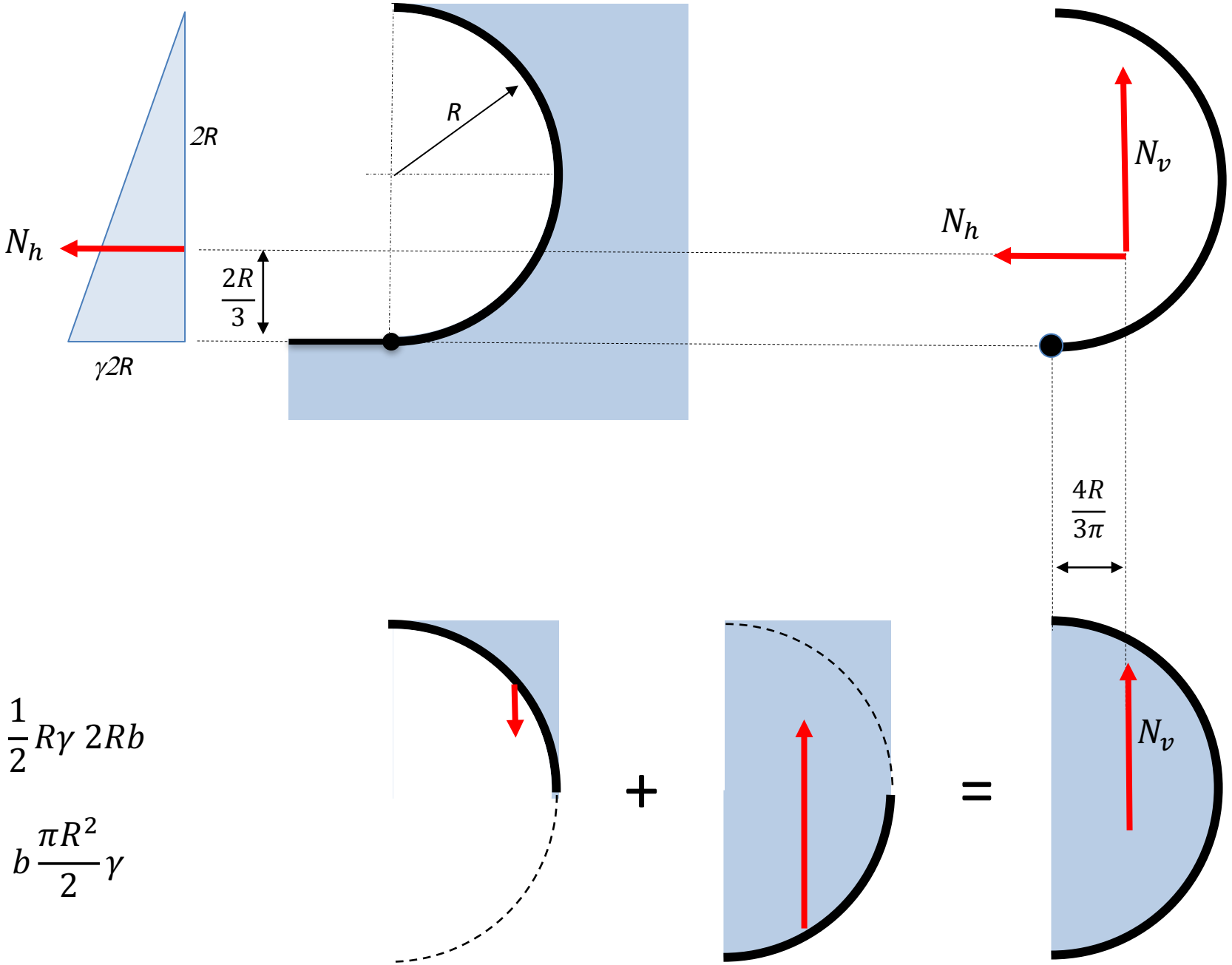

γR



$$N_v = b\frac{\pi R^2}{4}\gamma = \textit{ciężar cieczy nad powierzchnią}$$

$$N_h = \frac{1}{2}R\gamma\ Rb = \textit{napór na rzut powierzchni na płaszczyznę pionową}$$


R



$$N_h = \frac{1}{2} R\gamma \, 2Rb$$

$$N_v = b\frac{\pi R^2}{2}\gamma$$

MECHANIKA PŁYNÓW

SCIŚLIWOŚC

ŚCIŚLIWOŚĆ

WSPÓŁCZYNNIK ŚCIŚLIWOŚCI

$$\xi = \frac{\Delta V}{V}\ \frac{1}{\Delta p} \qquad \xi = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} \qquad [\ 1/\mathrm{Pa}\ (\mathrm{Pa}^{-1})\ ]$$

MODUŁ SPRĘŻYSTOŚCI

$$E = \frac{1}{\xi} = -V\frac{dp}{dV}$$

ROZSZERZALNOŚĆ CIEPLNA

$$\beta = \frac{\Delta V}{V}\ \frac{1}{\Delta T}$$

$$\Delta T \to 0$$

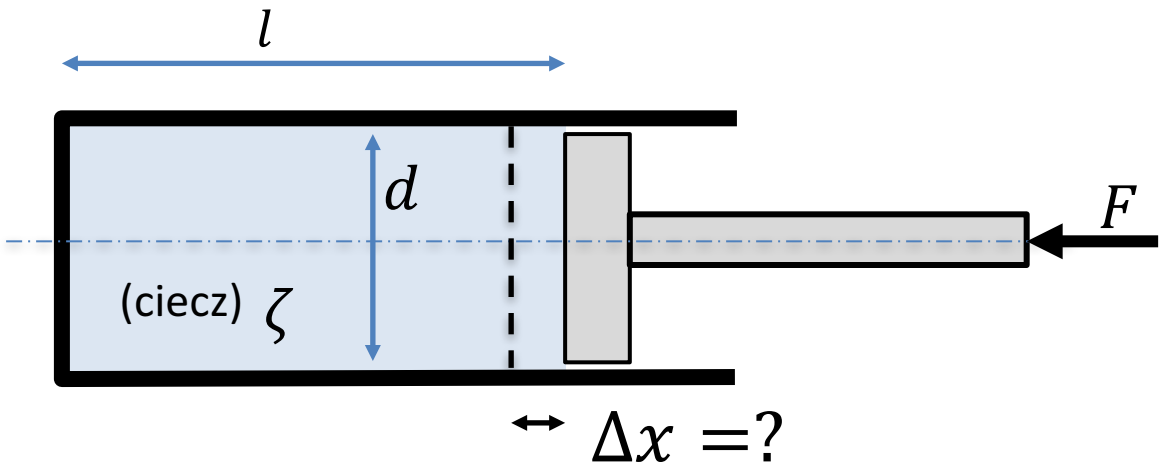
$$\beta = \frac{1}{V}\ \frac{dV}{dT}.$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

Ściśliwość (zadania)

Zadanie 1.
Nieodkształcalny cylinder wypełniony cieczą zamknięty jest szczelnie tłokiem. Znane są wymiary cylindra: średnica *d*, długość *l* oraz współczynnik ściśliwości cieczy ξ. Obliczyć przemieszczenie tłoka pod wpływem przyłożonej siły *F*.

F, *l*, *d*, ξ - dane
Δx = ?



$$\Delta p = \frac{F}{A}; \quad A = \frac{\Pi d^2}{4}$$

$$\xi \overset{def}{=} \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p} \quad \rightarrow \quad \Delta V = \xi V \Delta p, \quad V = l \cdot A$$

ΔV – zmiana objętości cieczy w zbiorniku spowodowana zmianą ciśnienia Δp spowodowaną siłą *F*.

$$\Delta x = \frac{\Delta V}{A} \quad \rightarrow \quad \Delta x = \xi \frac{V \cdot F}{A^2}$$

Zadanie 2.

Wyznaczyć przyrost ciśnienia w zbiorniku wypełnionym cieczą spowodowany przyrostem temperatury. Zbiornik nieodkształcalny.

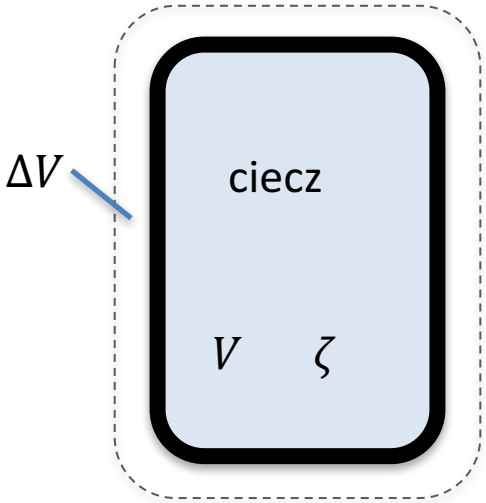
Dane: V – objętość zbiornika

ΔT – przyrost temperatury

ξ – współczynnik ściśliwości

β – współczynnik rozszerzalności cieplnej cieczy

Wyznaczyć Δp



$$\beta \overset{def}{=} \frac{\Delta V}{\Delta T} \cdot \frac{1}{V}$$

Gdyby zbiornik nie ograniczał objętości cieczy, to przyrost objętości spowodowany rozszerzalnością cieplną wynosiłby

$$\Delta V = \Delta T \cdot V \cdot \beta \qquad \text{(bez zmiany ciśnienia)}$$

Podstawiając otrzymane ΔV do wzoru na współczynnik ściśliwości $\xi \overset{def}{=} \frac{\Delta V}{\Delta p} \cdot \frac{1}{V}$ możemy wyznaczyć przyrost ciśnienia

$$\Delta p = \frac{\beta}{\xi} \Delta T$$

(dla

$V = 0{,}01\text{m}^3;\ \Delta T = 40\text{K};\ \beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1};\ \xi = 4{,}14 \cdot 10^{-10}\text{Pa}^{-1} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \Delta V = 0{,}000072\text{m}^3;\ \Delta p = 17{,}17\text{MPa})$

MECHANIKA PŁYNÓW

RÓWNANIE
CIĄGŁOŚCI PRZEPŁYWU

Natężenie przepływu (płynu)

Masowe natężenie przepływu

$$q_m \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]$$

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho q$$

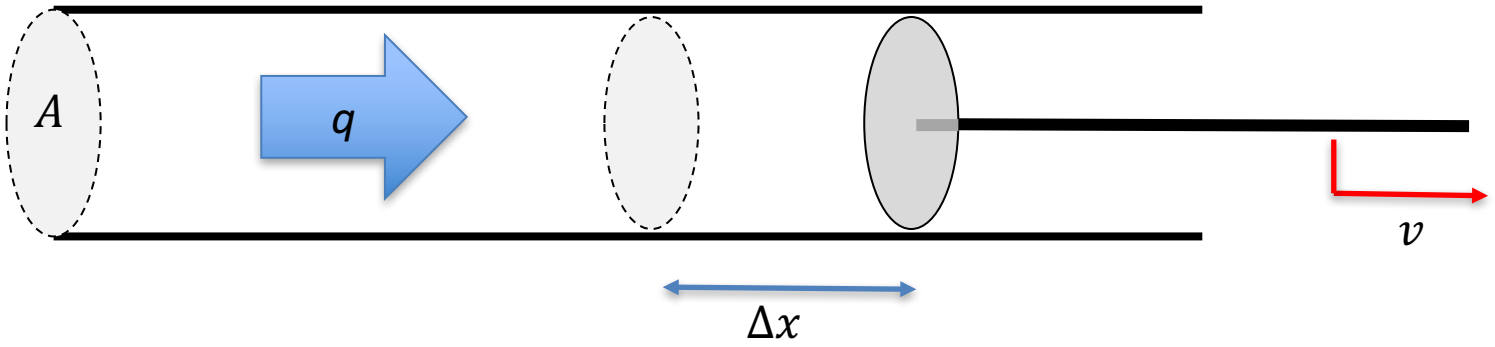
$dm = \rho dV, \quad \rho = \text{const}$

m – masa, V - objętość

Objętościowe natężenie przepływu

$$q \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right]$$

$$q = \frac{dV}{dt}$$

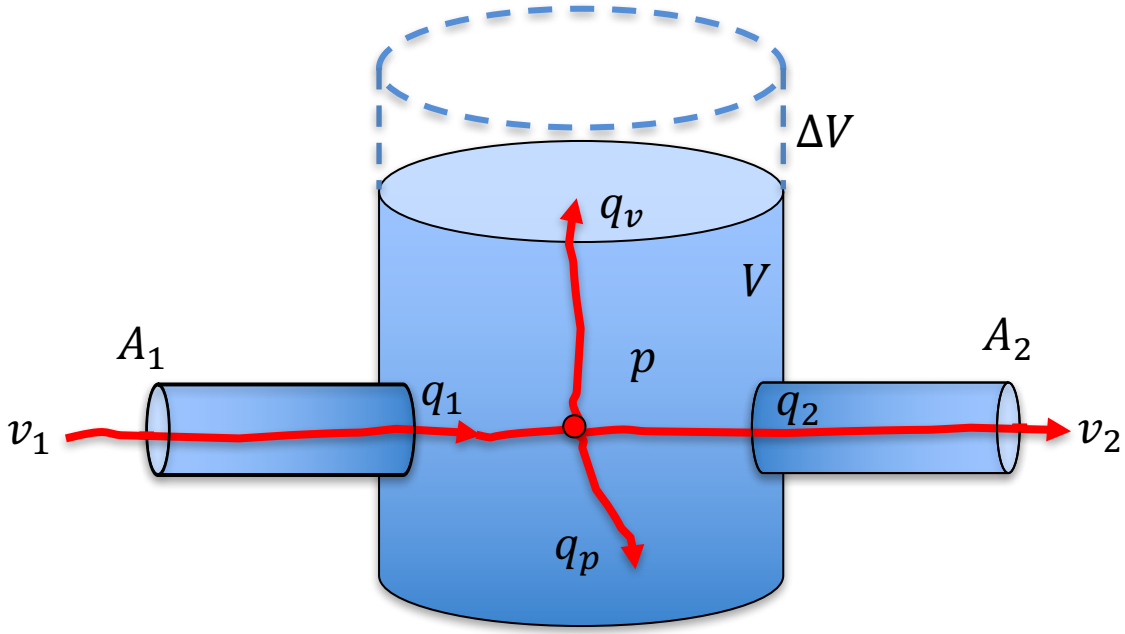


$V = A \cdot x$

A – powierzchnia przekroju rurociągu

$$q_m = \rho A \frac{dx}{dt} = \rho A v$$

$$q = A \frac{dx}{dt} = A v$$



$q_1 = A_1 v_1$ $\qquad$ $q_2 = A_2 v_2$

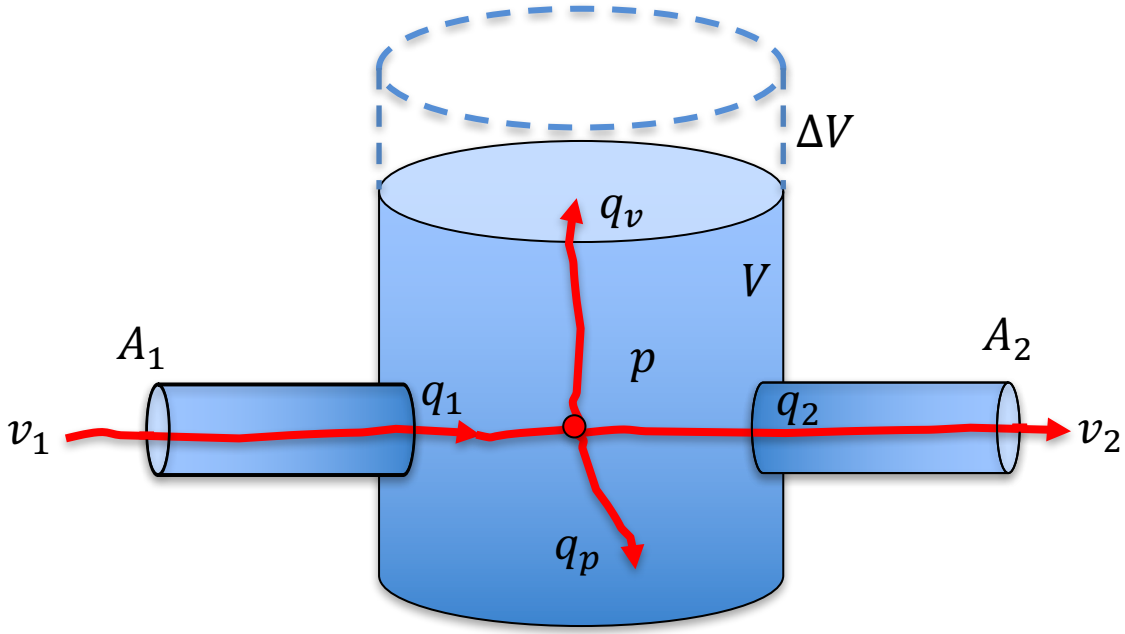
$$q_1 = q_2 + q_V + q_p$$

q_1 - strumień wejściowy

q_2 - strumień wyjściowy

q_V - przepływ spowodowany zmianą objętości (zbiornika)

q_p - przepływ spowodowany ściśliwością (zmiana gęstości i ciśnienia)



$$q_V = \frac{dV}{dt}$$

Aby otrzymać q_p weźmy pod uwagę równanie określające współczynnik ściśliwości

$$\xi = \frac{dV_p}{dp} \cdot \frac{1}{V}$$

$\xi V dp = dV_p$, a po podzieleniu przez dt

$$\xi V \frac{dp}{dt} = \frac{dV_p}{dt} = q_p$$

$$q_p = \xi V(t) \frac{dp}{dt}$$

$q_1 = A_1 v_1$ $\qquad$ $q_2 = A_2 v_2$

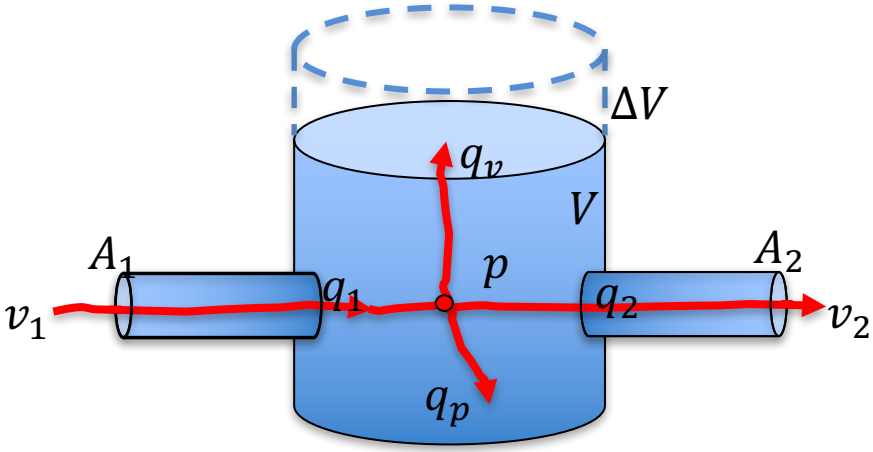
$$q_1 = q_2 + q_V + q_p$$

q_1 - strumień wejściowy

q_2 - strumień wyjściowy

q_V - przepływ spowodowany zmianą objętości (zbiornika)

q_p - przepływ spowodowany ściśliwością (zmiana gęstości i ciśnienia)



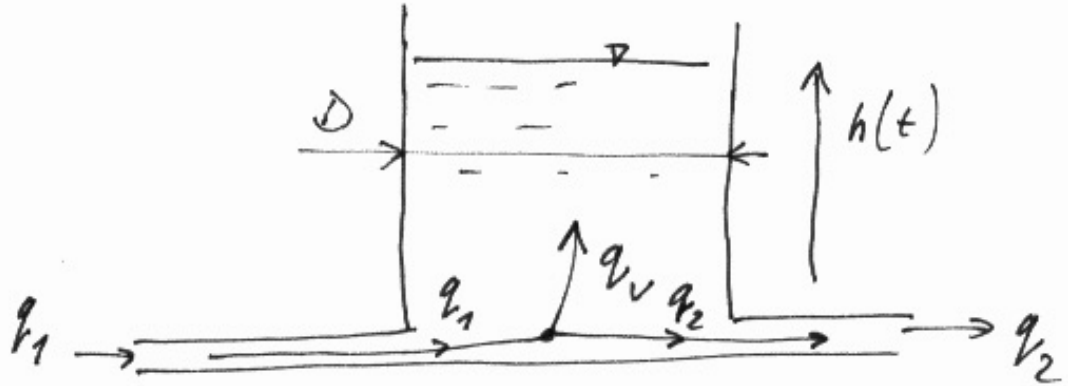
Jeżeli $q_p = 0$ i $q_V = 0$, tzn. Nie ma zmian objętości zbiornika i nie uwzględniamy ściśliwości, to

$$q_1 = q_2 \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

lub ogólnie $q = Av = \text{const}$, czyli strumień objętości zachowuje stałą wartość. To samo możemy powiedzieć o strumieniu masy

$$q_m = \rho A v = \text{const}$$

Zbiornik walcowy o średnicy D zasilany jest strumieniem cieczy o natężeniu przepływu q_1. Natężenie objętościowe wypływu wynosi q_2. Obliczyć prędkość zmiany wysokości poziomu cieczy w zbiorniku.

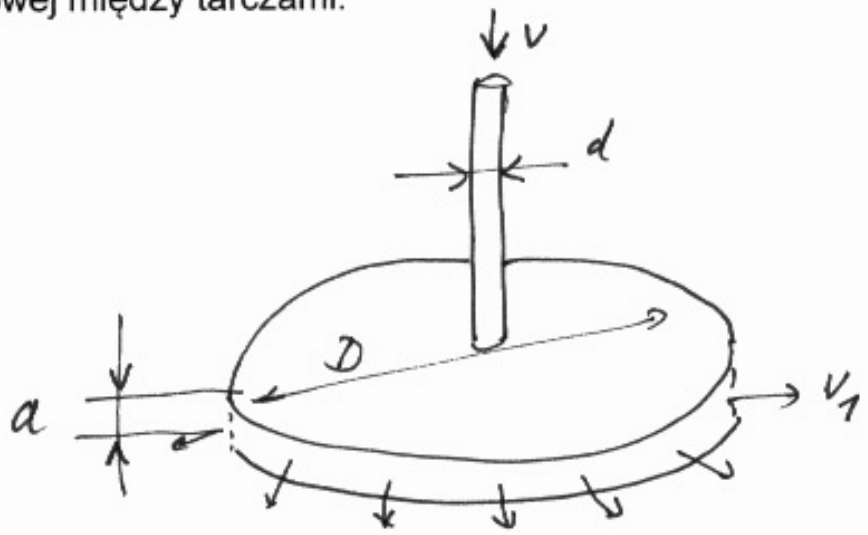


$$q_1 = q_V + q_2$$

$$q_V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_3, \text{ gdzie } v_3 = \frac{dh}{dt}$$

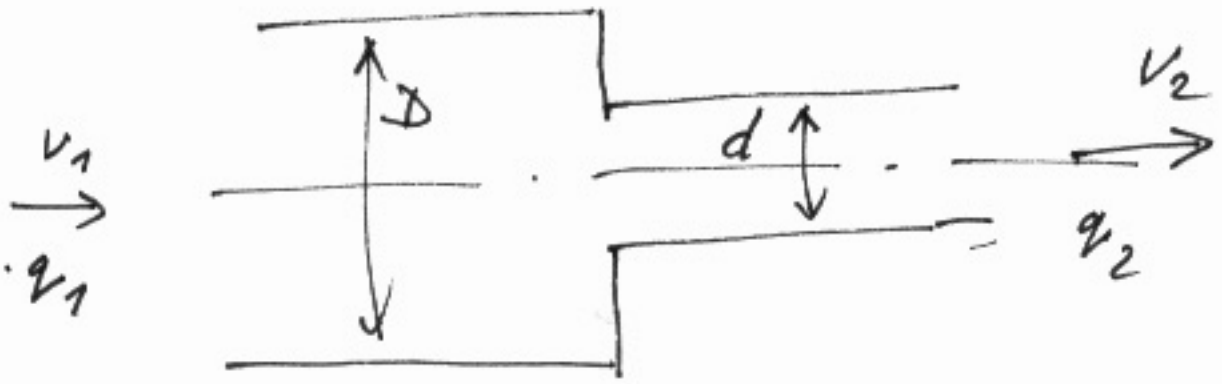
stąd otrzymujemy $v_3 = \dfrac{4\left(q_1 - q_2\right)}{\pi D^2}$

Między 2 tarcze o średnicy D, ułożone równolegle w odległości a tłoczona jest centralnie woda przez rurkę o średnicy d z prędkością v. Obliczyć prędkość v_1 w szczelinie wylotowej między tarczami.



$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot v = \pi D a \cdot v_1 \rightarrow v_1 = \frac{d^2 v}{4Da}$$

Podczas przepływu w rurociągu o zmiennym przekroju występuje następujący związek między prędkościami przepływu v_1 i v_2



$$q_1 = q_2$$

$$v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

MECHANIKA PŁYNÓW

RÓWNANIE BERNOULLIEGO
(zasada zachowania energii)

Zasada zachowania energii. Równanie Bernoulliego

Zasada zachowania energii (dla elementarnej masy *dm* zawartej w elementarnej objętości *dV*; $dm = \rho dV$)

$$\frac{dmv^2}{2} + dmgh + pdV = \text{const}$$

(suma energii kinetycznej, potencjalnej i energii ciśnienia jest stała)

$$\frac{dV\rho v^2}{2} + dV\rho gh + pdV = \text{const}$$

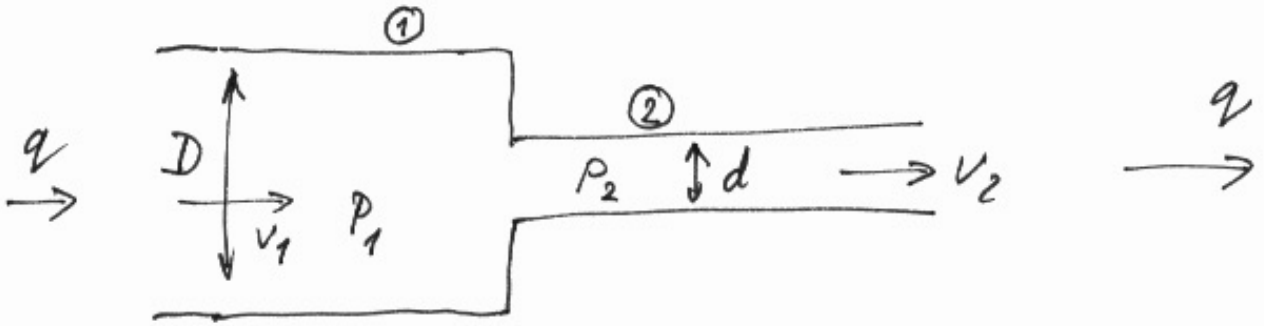
$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + h\gamma + p = \text{const}} \qquad \gamma = \rho g$$

lub

$$\boxed{\frac{v^2}{2g} + h + \frac{p}{\gamma} = \text{const}}$$

Jest to równanie Bernoulliego (w dwóch wersjach) i wyraża zasadę zachowania energii dla płynu.

Znane jest ciśnienie p_1 i prędkość v_1 cieczy w pierwszym odcinku rurociągu o średnicy D. Wyznaczyć prędkość v_2 ciśnienie p_2 w odcinku o średnicy $d<D$. Znaleźć natężenie przepływu q. Straty pominąć.



Natężenie przepływu $$q = v_1 \frac{\pi D^2}{4}$$

Z równania ciągłości przepływu

$$q = v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

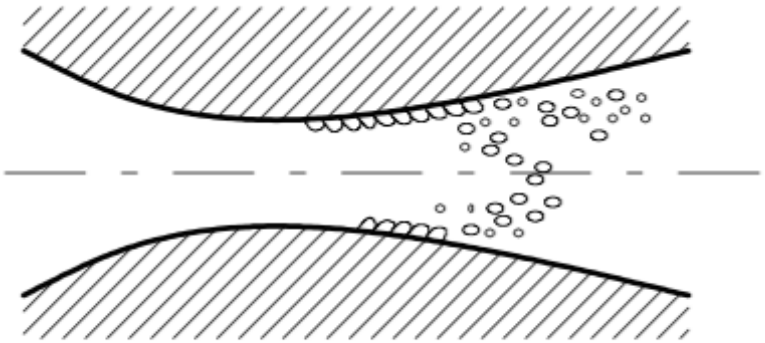
znajdujemy $$v_2 = v_1 \frac{D^2}{d^2}$$

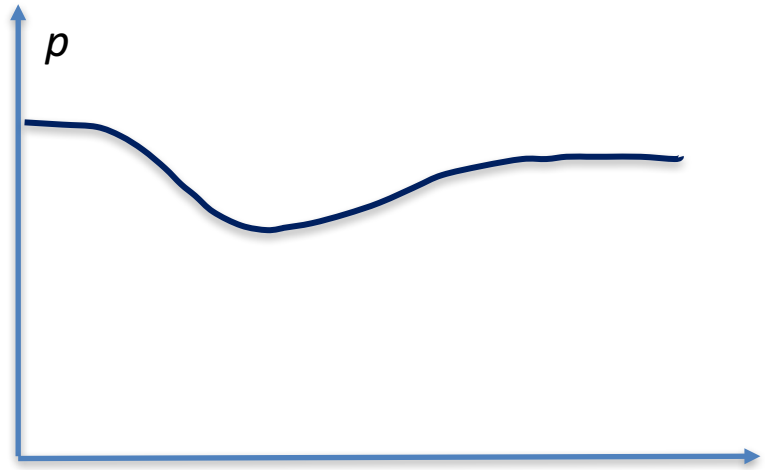
$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

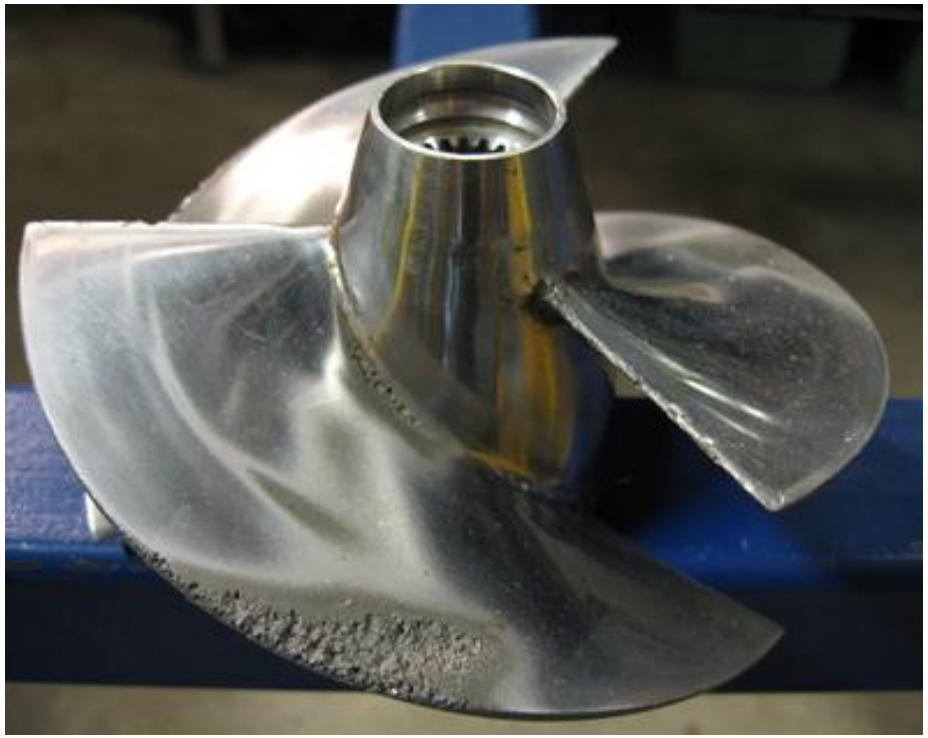
$$\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma = p_2 < p_1$$

Podczas przepływu cieczy przez zwężkę (rys. 5.8) ciśnienie w przekroju przewężenia może teoretycznie przyjmować dowolnie małe wartości, praktycznie jednak wartość ciśnienia jest ograniczona i nie może spaść poniżej ciśnienia parowania (wrzenia) odpowiadającego temperaturze przepływającej cieczy. Obniżeniu ciśnienia do wartości bliskich ciśnieniu parowania towarzyszy wydzielanie się gazów i par z cieczy, czyli *zjawisko kawitacji*.





Z występowaniem kawitacji jest związany zawsze wzrost strat energii, niszczenie materiału (tzw. erozja kawitacyjna) oraz pojawienie się charakterystycznych efektów dźwiękowych (tzw. szum kawitacyjny).



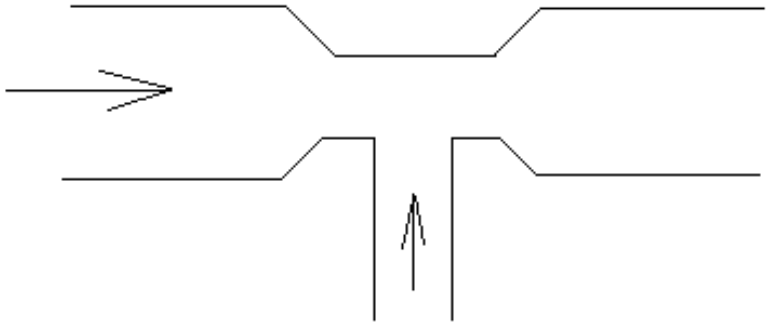


Uszkodzenie grzyba zaworu w wyniku kawitacji

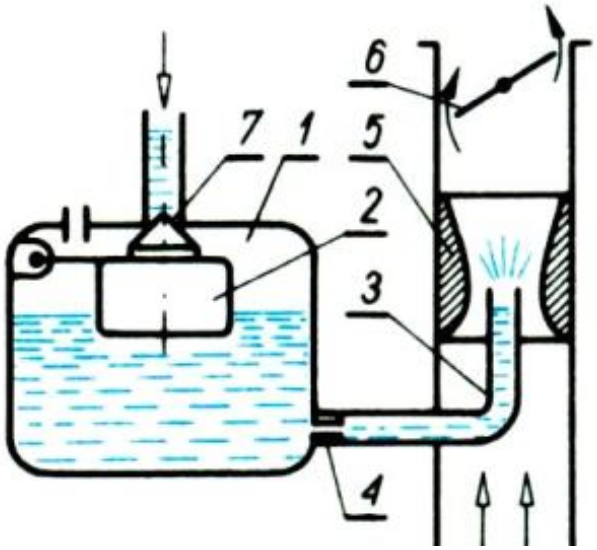
Kawitacja powstaje nie tylko w przepływie cieczy przez przewody, ale i podczas opływu ciał, a zwłaszcza na łopatkach śrub okrętowych, wirników turbin i pomp. W wyniku dużych prędkości obrotowych wirników i śrub, w niektórych obszarach, prędkości przepływu cieczy osiągają takie wartości, że ciśnienie spada do wartości p_{cav} i pojawia się kawitacja.

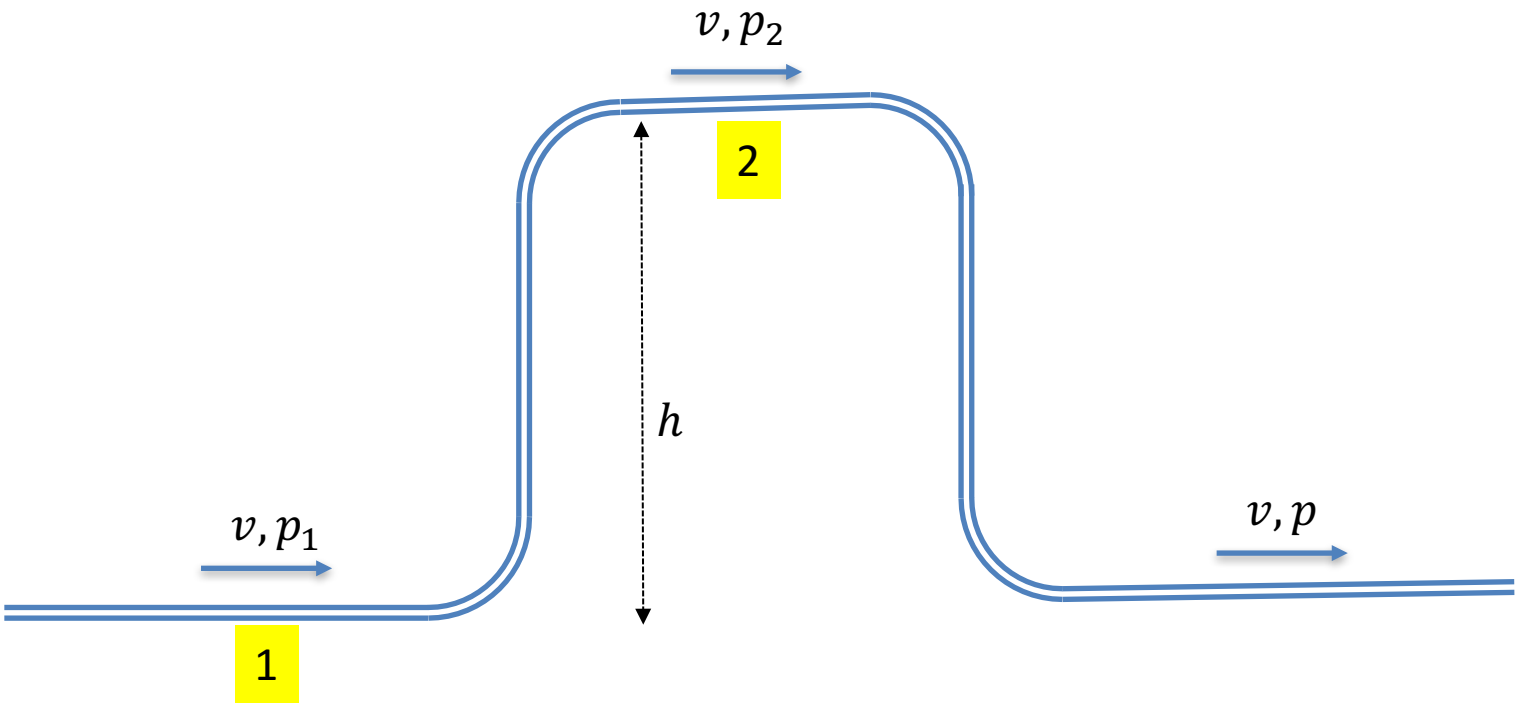
$$p_{\mathrm{cav}} > p_w$$

Powietrze



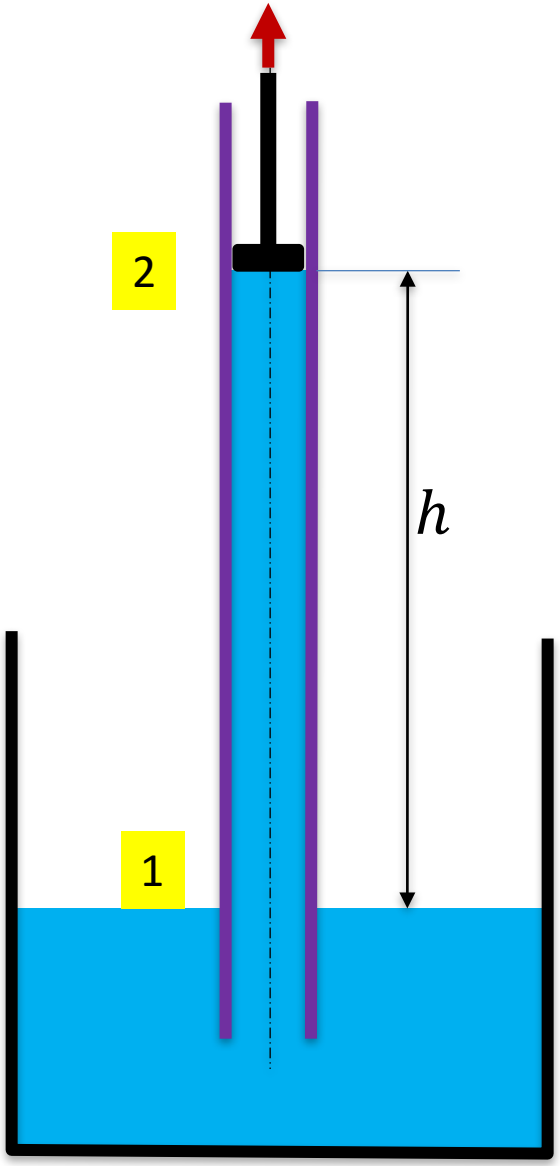
Zboże





$$0 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

$$p_2 = p_2 - h\gamma$$



$$0 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{0^2}{2g} = h + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{0^2}{2g}$$

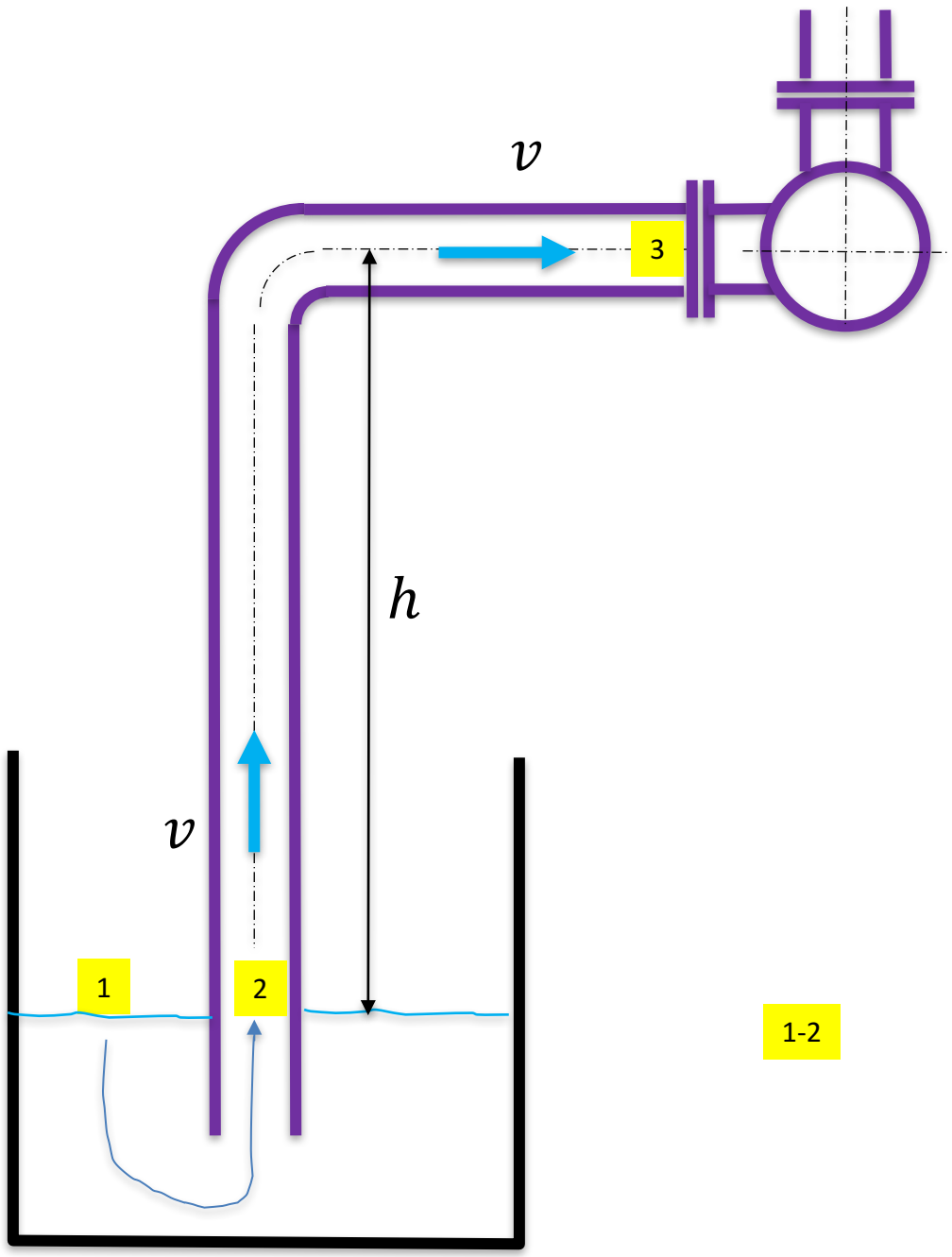
$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

$$p_1 = p_a = 100\ kPa$$

$$p_2 = p_{wrzenia} = 2\ kPa$$ (przy 20° C)

$$\gamma = 10\ \ kN/m^3$$

$$h = 9{,}8\ m$$



2-3

$$0 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

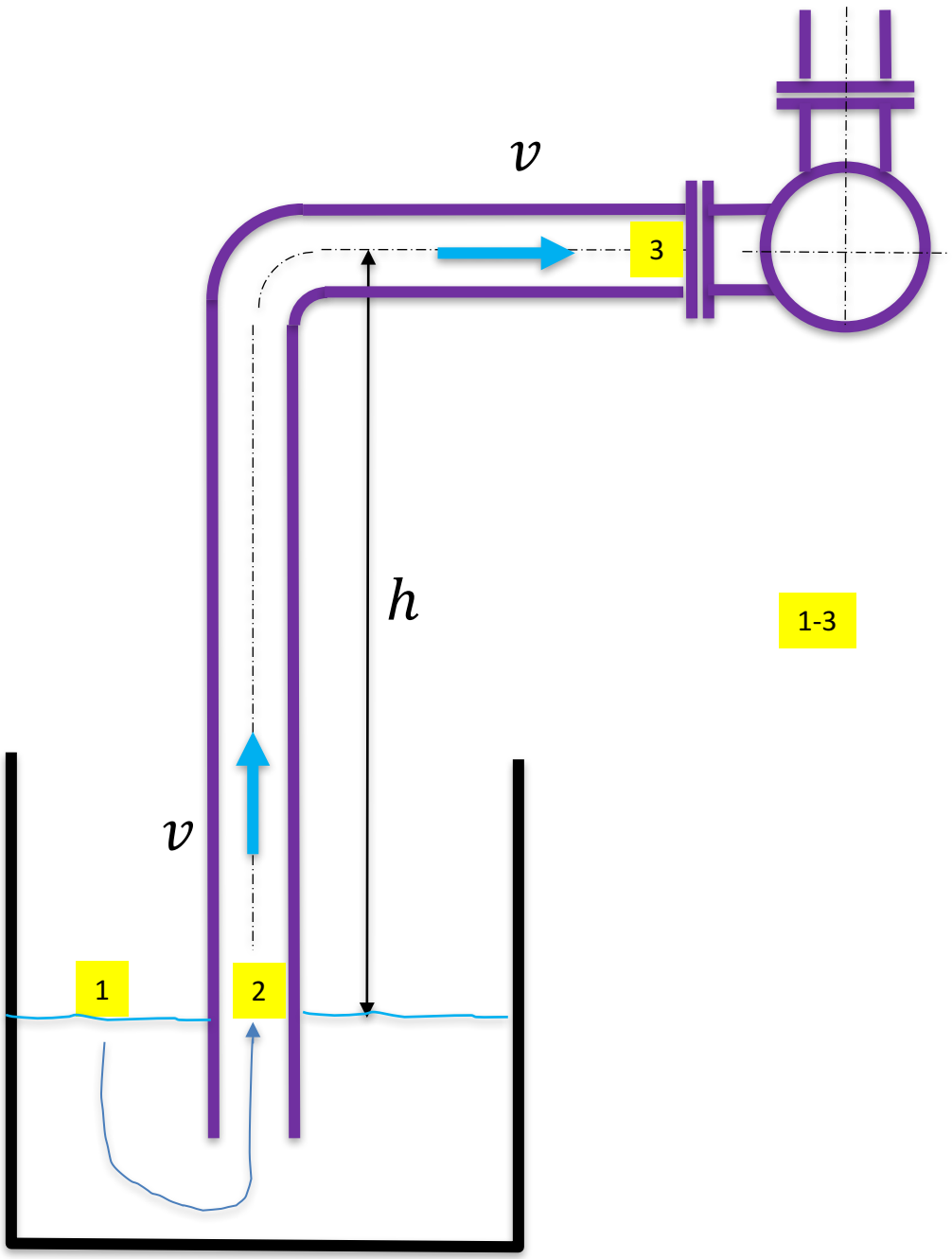
$$h = \frac{p_a}{\gamma} - \frac{p_3}{\gamma} - \frac{v^2}{2g}$$

$$(p_3 = p_{wrzenia})$$

1-2

$$0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{0^2}{2g} = 0 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

$$p_2 = p_a - \frac{\gamma}{2g} v^2$$

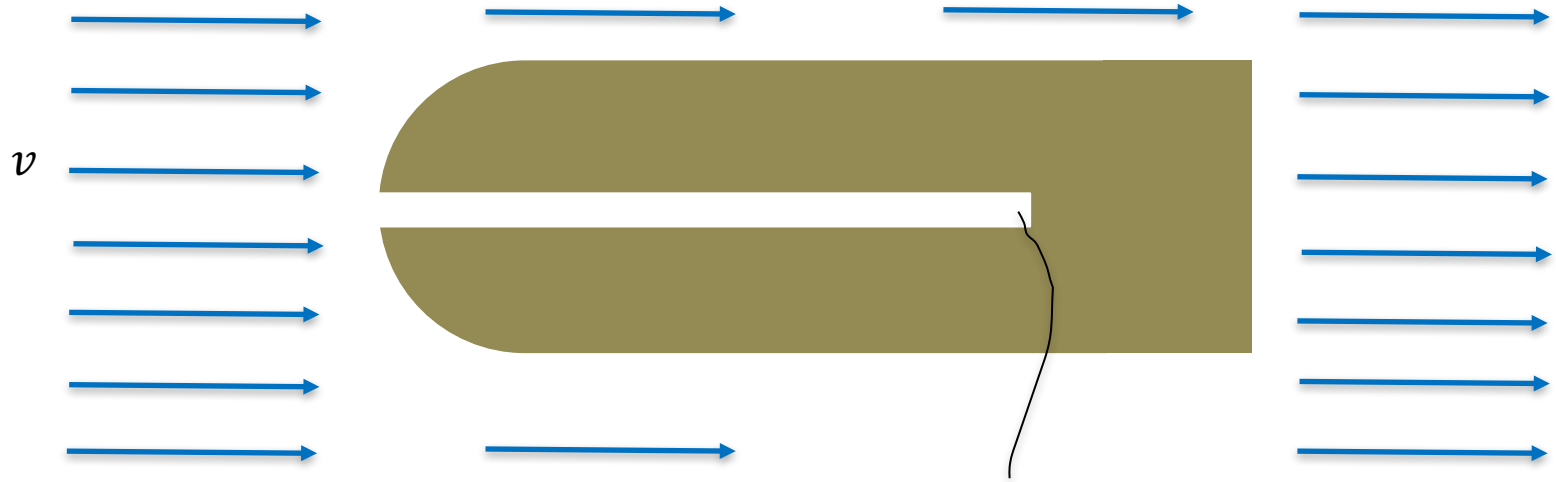


1-3

$$0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{0^2}{2g} = h + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{p_a}{\gamma} - \frac{p_3}{\gamma} - \frac{v^2}{2g}$$

$$(p_3 = p_{wrzenia})$$



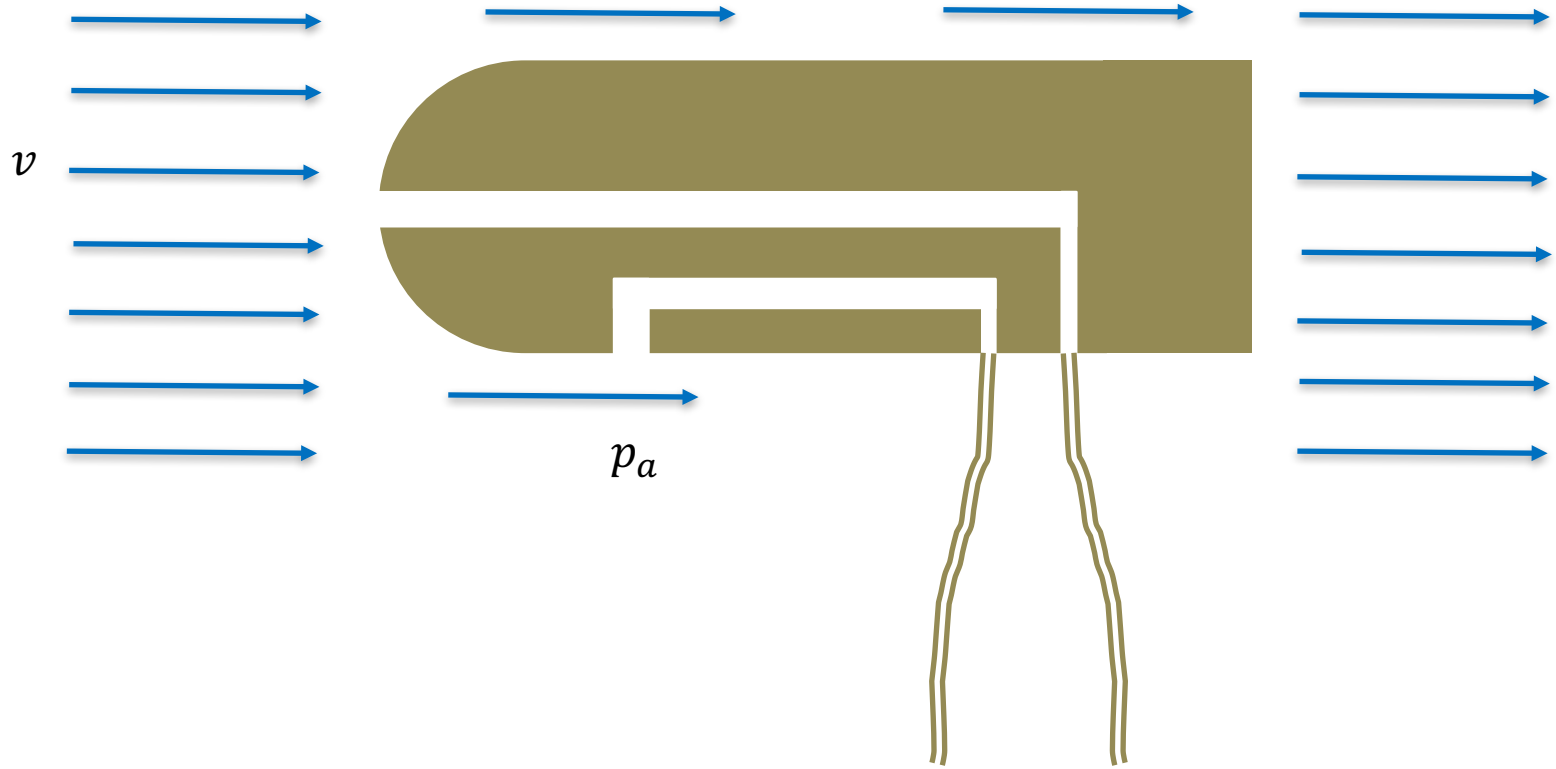
v
p_a

$v = 0$
p

$$0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = 0 + \frac{p}{\gamma} + \frac{0^2}{2g}$$

$$p = \frac{\gamma v^2}{2g} + p_a = \frac{\rho v^2}{2} + p_a$$

RURKA PITOTA



$$p - p_a = \frac{\rho v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_a)}{\rho}}$$

RURKA PRANDTLA

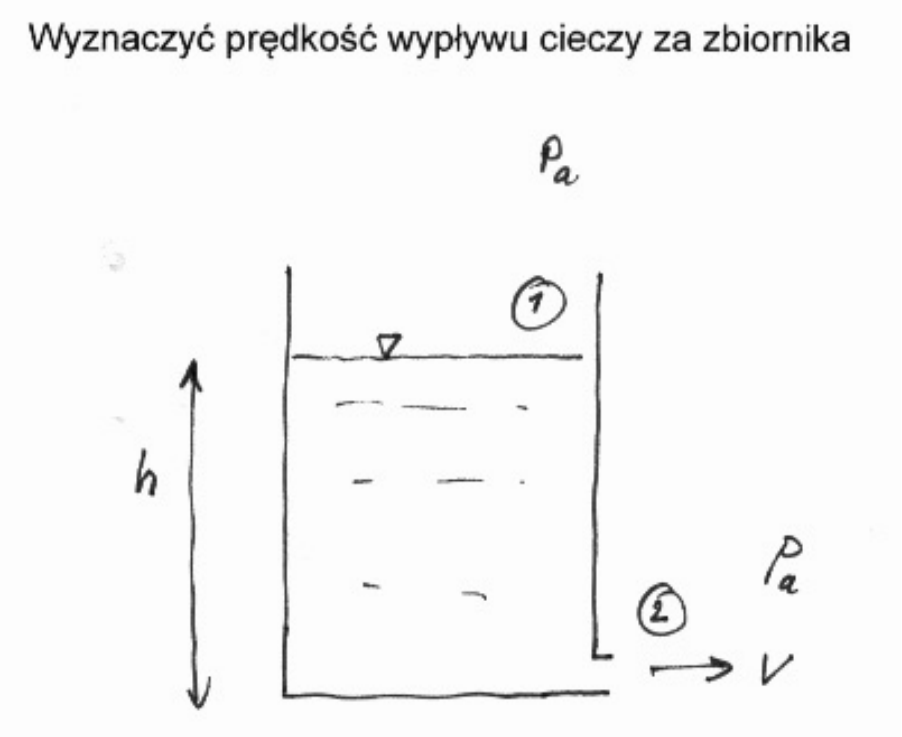
MIG 23





RURKA PRANDTLA

Wyznaczyć prędkość wypływu cieczy za zbiornika



Zakładamy, że powierzchnia przekroju zbiornika jest duża i możemy przyjąć jako równą zeru (w przybliżeniu) prędkość opadania powierzchni cieczy w zbiorniku.
Równanie Bernoulliego dla punktów 1 i 2 ma postać

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

$p_1 = p_2 = p_a$ (ciśnienie atmosferyczne)

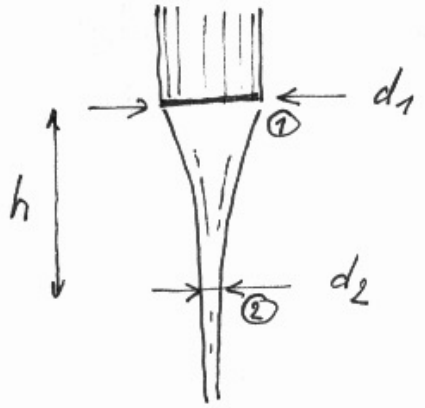
$h_1 = h$, $h_2 = 0$ (poziom odniesienia $h = 0$ – na wysokości wypływu)

$v_1 \cong 0$ (duża średnica zbiornika)

$v_2 = v = ?$

Po uwzględnieniu powyższych danych i uproszczeniu

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$



Z kranu wypływa struga wody. Obliczyć natężenie strugi wypływającej jeżeli z pomiarów (suwmiarką) mamy d_1, d_2 i h.

Równanie Bernoulliego:

$$\frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$h_1 = h, \quad h_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2g} + h = \frac{v_2^2}{2g}}$$

Równanie ciągłości przepływu

$$v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$\boxed{v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2}$$

Z układu 2 równań (w ramkach) wyznaczamy v_1, v_2. Poszukiwane natężenie przepływu

$$q = \frac{v_1 \pi d_1^2}{4} \quad \text{lub} \quad q = \frac{v_2 \pi d_2^2}{4}$$

Obliczyć prędkość v przepływu płynu w przewodzie mając do dyspozycji wyniki pomiaru ciśnienia p_1 i p_2 (poprzez rurkę Pitota).

Z równania Bernoulliego dla punktów 1 i 2 mamy (pomijamy małą różnicę wysokości)

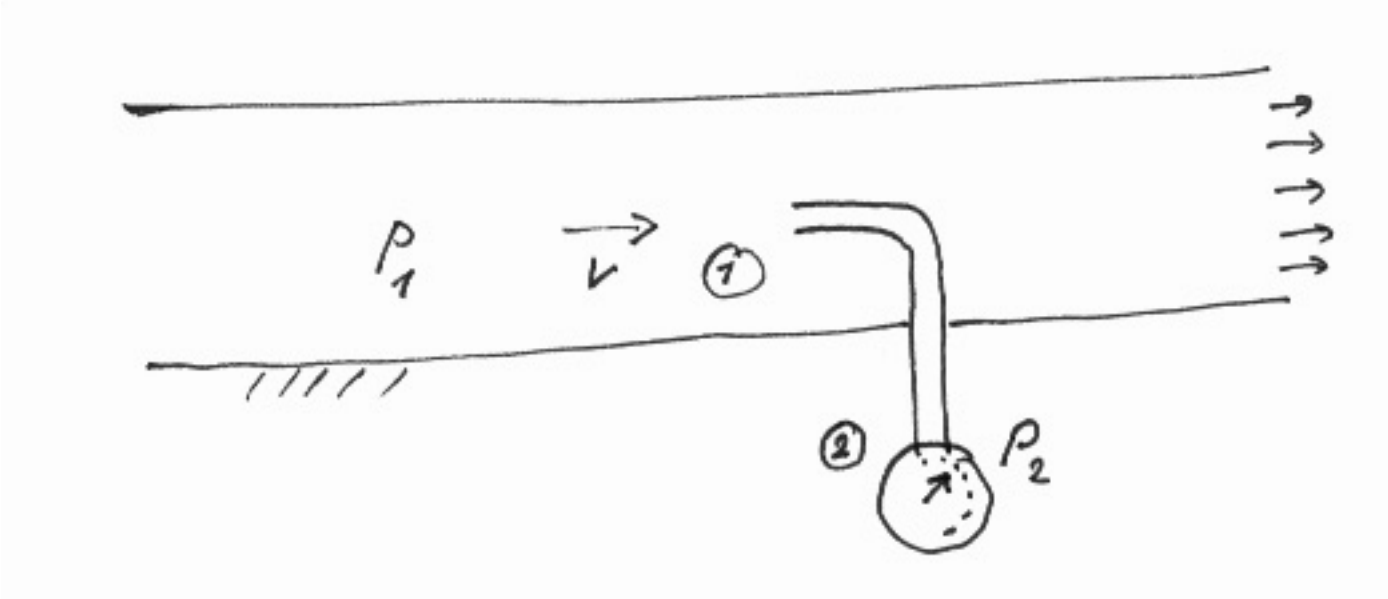
$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}$$

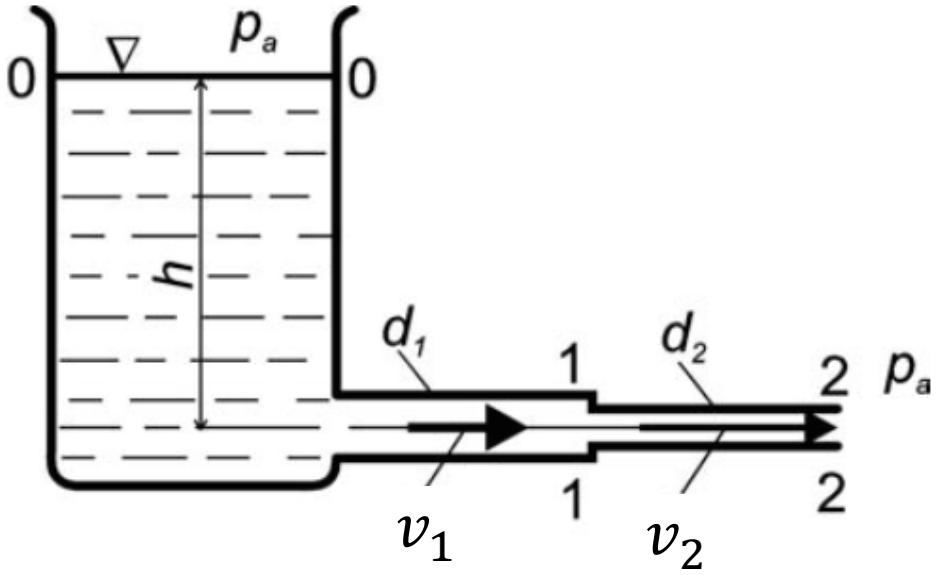
$$p_2 = p_1+\frac{\rho v^2}{2}$$

$$\rho\frac{v^2}{2} = p_2 - p_1$$

$$v^2 = \frac{2}{\rho}\left(p_2 - p_1\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_2 - p_1\right)}$$





Dane:

$d_1 = 30$ mm

$d_2 = 20$ mm

$h = 4$ m

$p_a = 100$ kN/m^2 $= 100000$ Pa

Wyznaczyć:

v_1, v_2, p_1, p_2

Równanie Bernoulliego 0-2

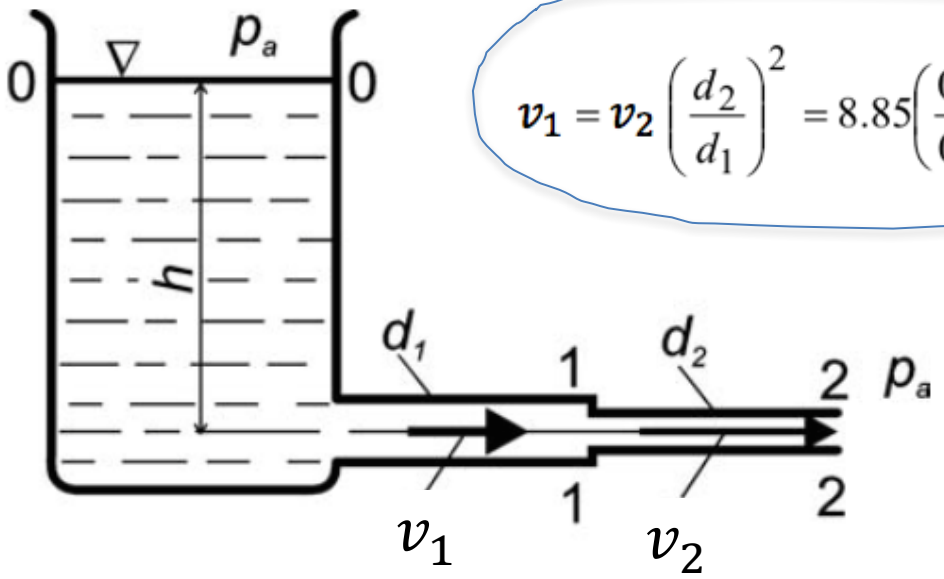
$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + h = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + 0$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 4} = 8.85 \frac{m}{s}$$

Równanie ciągłości przepływu

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 ,$$

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 8.85 \left(\frac{0.02}{0.03} \right)^2 = 3.94 \frac{m}{s}$$



$$v_1 = v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 8.85\left(\frac{0.02}{0.03}\right)^2 = 3.94\ \frac{m}{s}$$

Dane:
$d_1 = 30$ mm
$d_2 = 20$ mm
$h = 4$ m
p_a=100 kN/m^2 =100000 Pa

Wyznaczyć:
v_1, v_2, p_1, p_2

Równanie Bernoulliego 0-1

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + h = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + 0$$

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h + p_a - \frac{\rho v_1^2}{2} = 1000 \cdot 9.81 \cdot 4 + 100000 - \frac{1000 \cdot 3.94^2}{2} = 132.1\ \frac{kN}{m^2} = p_1$$

$$p_{1n} = 32{,}1\ kN/m^2$$

$p_2 = p_a$ $\quad p_{2n} = 0$

MECHANIKA PŁYNÓW

LEPKOŚĆ

LEPKOŚĆ – czyli **TARCIE WEWNĘTRZNE** jest to zdolność płynu do przenoszenia naprężeń stycznych między sąsiednimi warstwami płynu, poruszającymi się z różnymi prędkościami względem siebie.

Naprężenia styczne w płynie powstają także między płynem a ciałem stałym, np. ścianką zbiornika lub przewodu. Naprężenia stycznie **nie występują** w stanie spoczynku płynu.

Miarą lepkości jest – **DYNAMICZNY WSPÓŁCZYNNIK LEPKOŚCI – μ**

Prócz lepkości dynamicznej stosuje się również **lepkość kinematyczną ν**

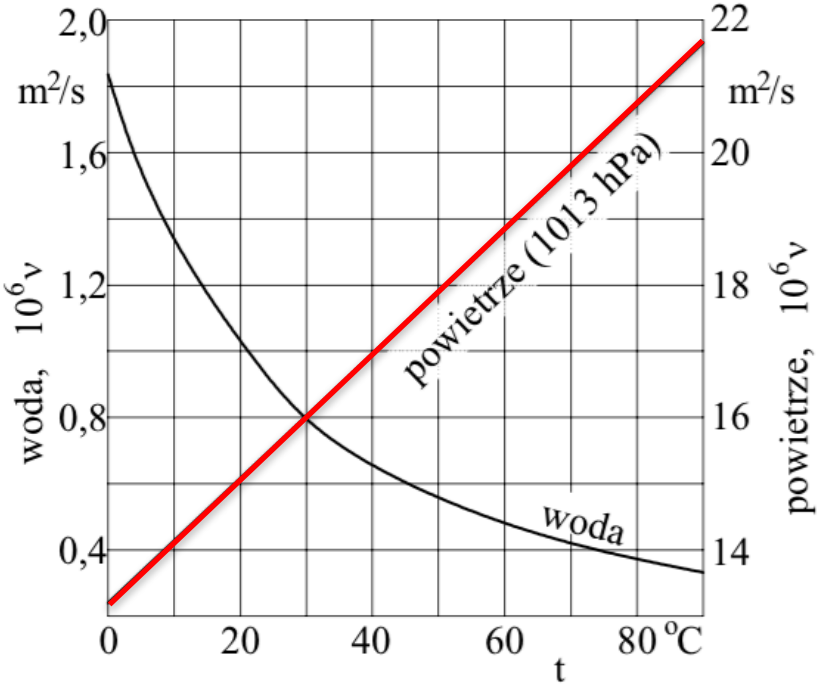
Współczynnik lepkości kinematycznej definiuje się następująco:

$$\nu = \mu / \rho$$

jednostką lepkości dynamicznej w układzie jest Pa · s,
lepkości kinematycznej m^2/s.

Ze wzrostem ciśnienia lepkość dynamiczna cieczy i gazów rośnie (wyraźne zmiany występują przy zmianach ciśnienia rzędu kilku MPa),

natomiast ze wzrostem temperatury lepkość cieczy maleje, a gazów rośnie



Rys. 1.4. Lepkość wody i powietrza w zależności od temperatury

powietrze

$T \uparrow \quad \rightarrow \nu \uparrow$

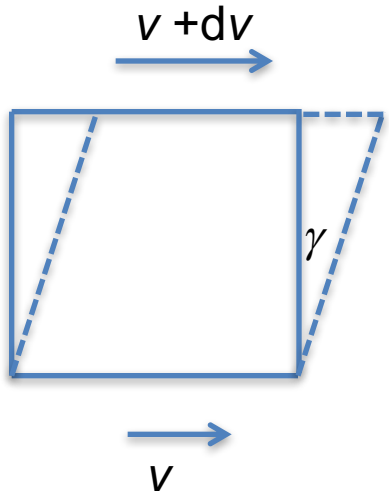
Gęstość suchego powietrza w *[kg/m³]* w zakresie temperatur od *12°C* do *26°C* pod różnymi ciśnieniami

Temp. \ Ciśnienie °C \ hPa	970	980	990
12	1,186	1,198	1,210
14	1,177	1,189	1,202
16	1,169	1,181	1,193
18	1,161	1,173	1,185
20	1,153	1,166	1,177
22	1,145	1,158	1,170
24	1,138	1,150	1,162
26	1,130	1,142	1,154

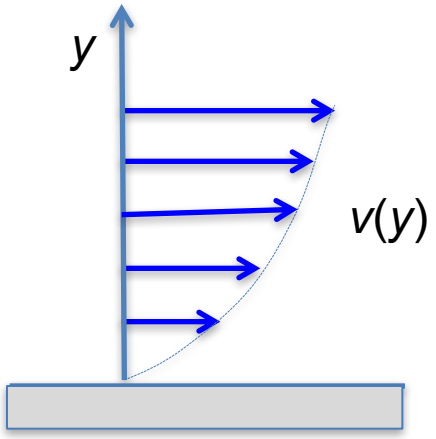
$T \uparrow \quad \rightarrow \quad \rho \downarrow$

LEPKOŚĆ

Lepkość jest właściwością każdego płynu rzeczywistego. Występuje podczas wzajemnego przemieszczania się warstw płynu poruszających się z różną prędkością - powstają wtedy siły styczne. Lepkość oznacza zatem zdolność płynu do przenoszenia naprężeń stycznych (tylko w czasie ruchu względnego sąsiednich warstw płynu).



Odkształcenie (kąt γ) elementu płynu



Rozkład prędkości w pobliżu płytki

naprężenia styczne

Ciało stałe

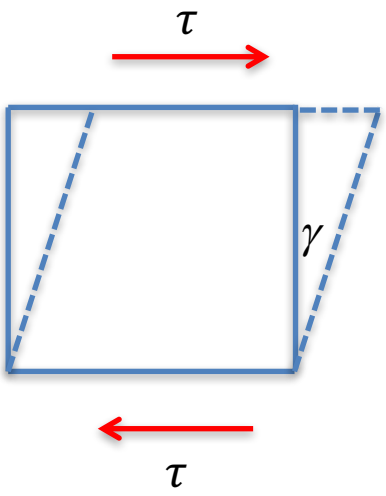
$$\tau \approx \gamma$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Płyn

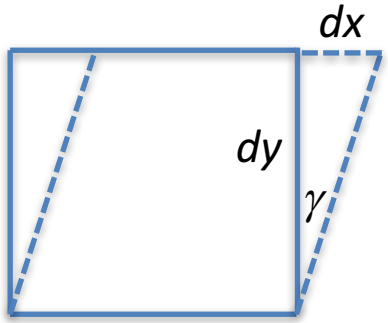
$$\tau \approx \dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$



$$\gamma = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\left(x\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}y}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{x}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}, \qquad v = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$



$\mu\left[\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}\right]$ lepkość dynamiczna

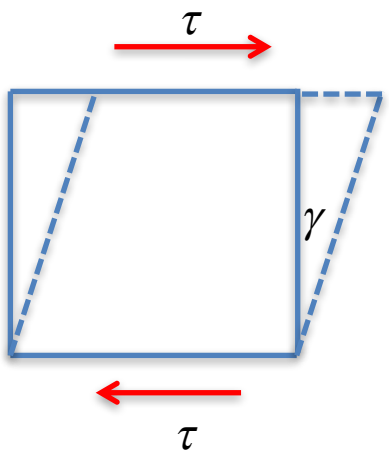
$\nu = \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right]$ lepkość kinematyczna

LEPKOŚĆ

Naprężenie styczne τ jest proporcjonalne do gradientu prędkości $\frac{dv}{dy}$

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{dv}{dy} \qquad [\mathrm{Pa \cdot s}]$$

μ – współczynnik lepkości dynamicznej



Naprężenia styczne w elemencie płynu

Lepkość dynamiczna wybranych substancji

$$1\ \text{poise} \equiv 1\ \text{P} = 0{,}1\ \text{Pa·s}$$

Współczynniki lepkości wybranych substancji:

Ciecze:

- woda[3]:
  - 0 °C: 1,79 mPa·s
  - 25 °C: 0,89 mPa·s
  - 100 °C: 0,28 mPa·s
- gliceryna (25 °C): 934 mPa·s[3]
- miód: 2–10 Pa·s
- etanol (25 °C): 1,07 mPa·s[3]
- rtęć (20 °C): 1,554 mPa·s[4]
- fenol (45 °C): 4,036 mPa·s[5]
- smoła (20 °C): ~10^7 Pa·s[4]
- krew (37 °C): ~3,5 mPa·s[6]

Gazy:

- powietrze (0 °C): 17,08 µPa·s[4]
- wodór[4]:
  - 0 °C: 8,35 µPa·s
  - 827 °C: 21,37 µPa·s

Współczynnik lepkości kinematycznej η

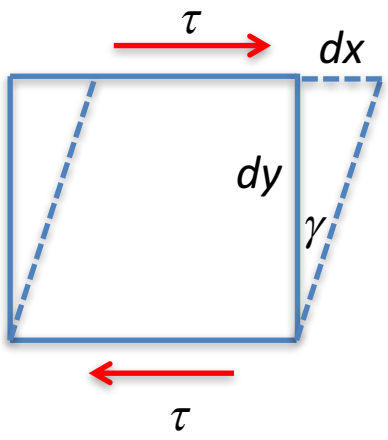
$$\eta = \frac{\mu}{\rho} \qquad \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

1 stokes $\equiv$ 1 St = 1 $cm^2/s = 10^{-4} m^2/s$,

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\left(x\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}y}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{x}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}, \qquad v = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \quad \rightarrow \quad T = A \cdot \tau = \boxed{\mu A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = T}$$



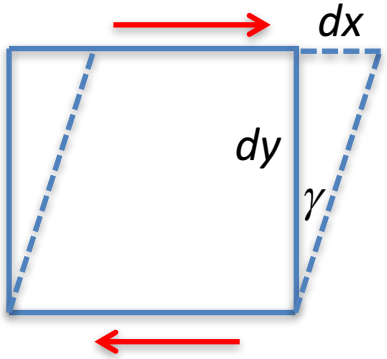
$\mu \left[\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}\right]$ lepkość dynamiczna

$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right]$ lepkość kinematyczna

$$\gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{d\left(x\left(t\right)\right)}{dy}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{d\left(\dot{x}\left(t\right)\right)}{dy} = \frac{dv}{dy}, \qquad v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad \rightarrow \quad T = A \cdot \tau = \boxed{\mu A \frac{dv}{dy} = T}$$

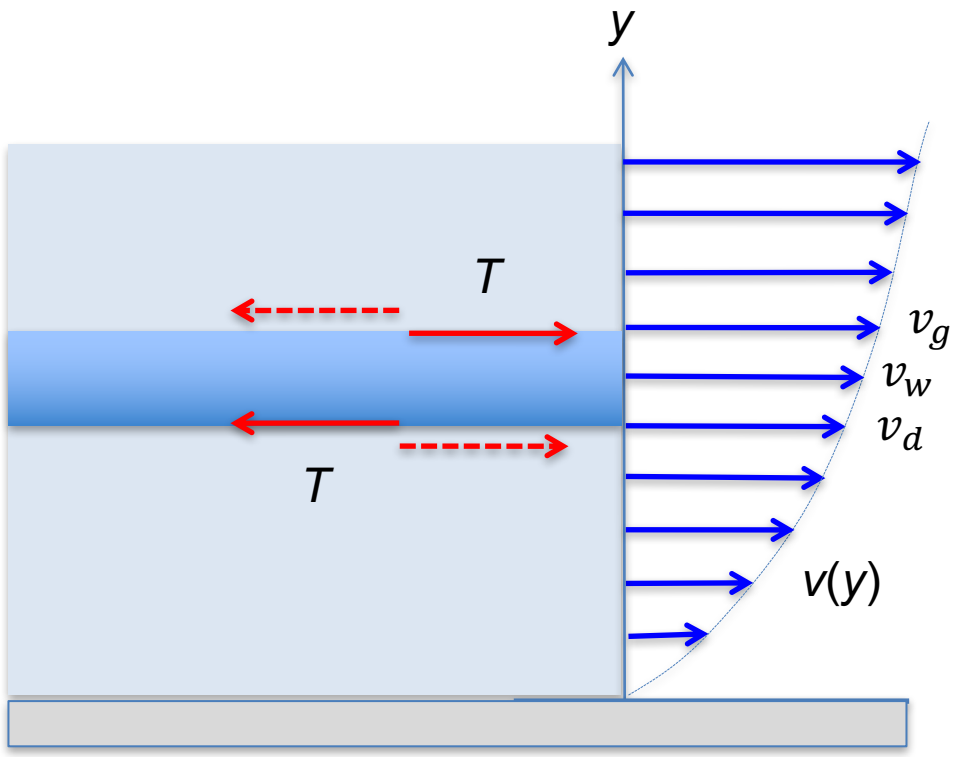


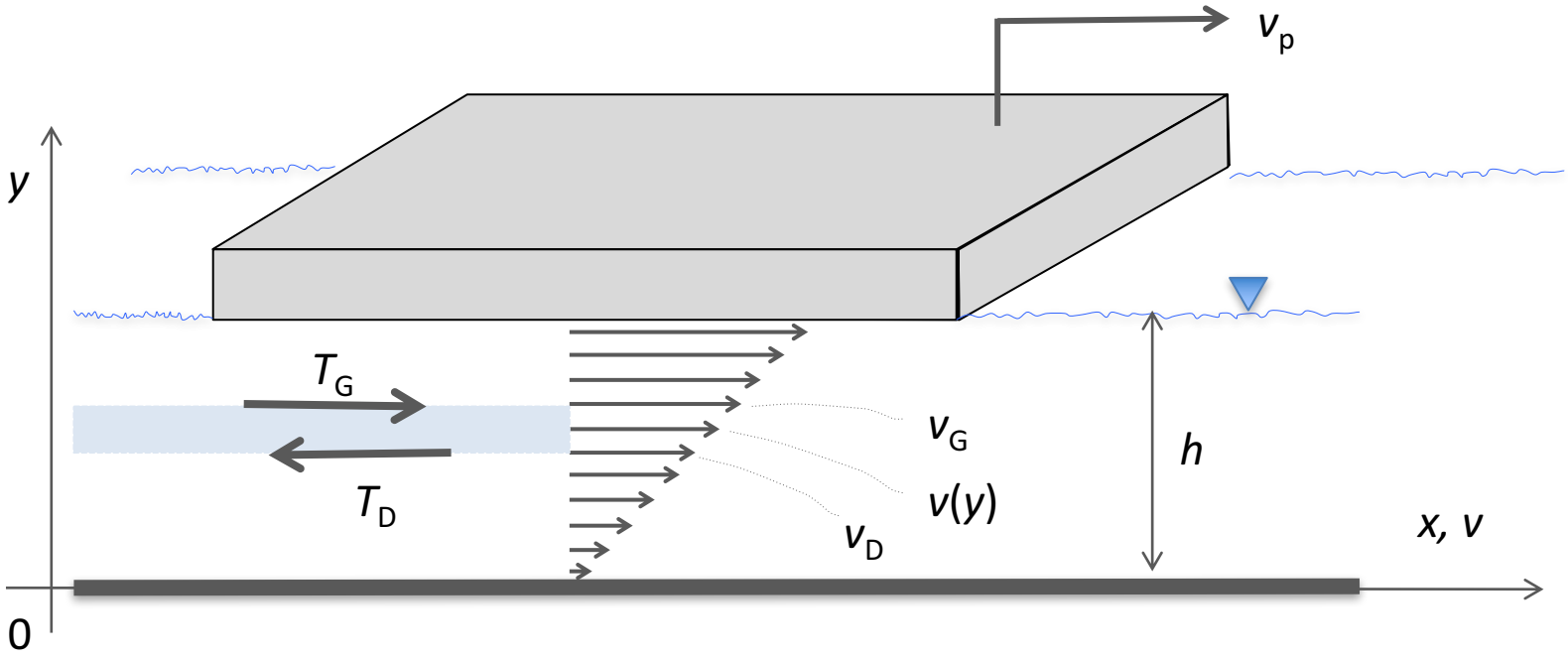
$\mu \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}\right]$ lepkość dynamiczna

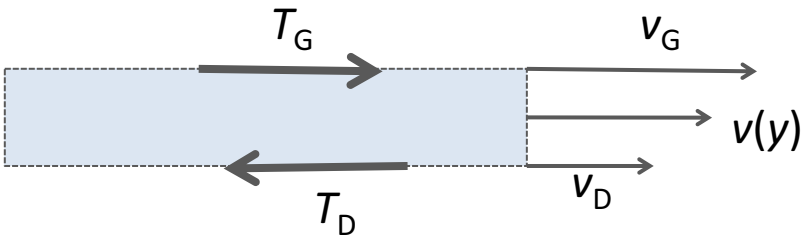
$\nu = \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$ lepkość kinematyczna

Siły tarcia (T) działające na warstwę płynu

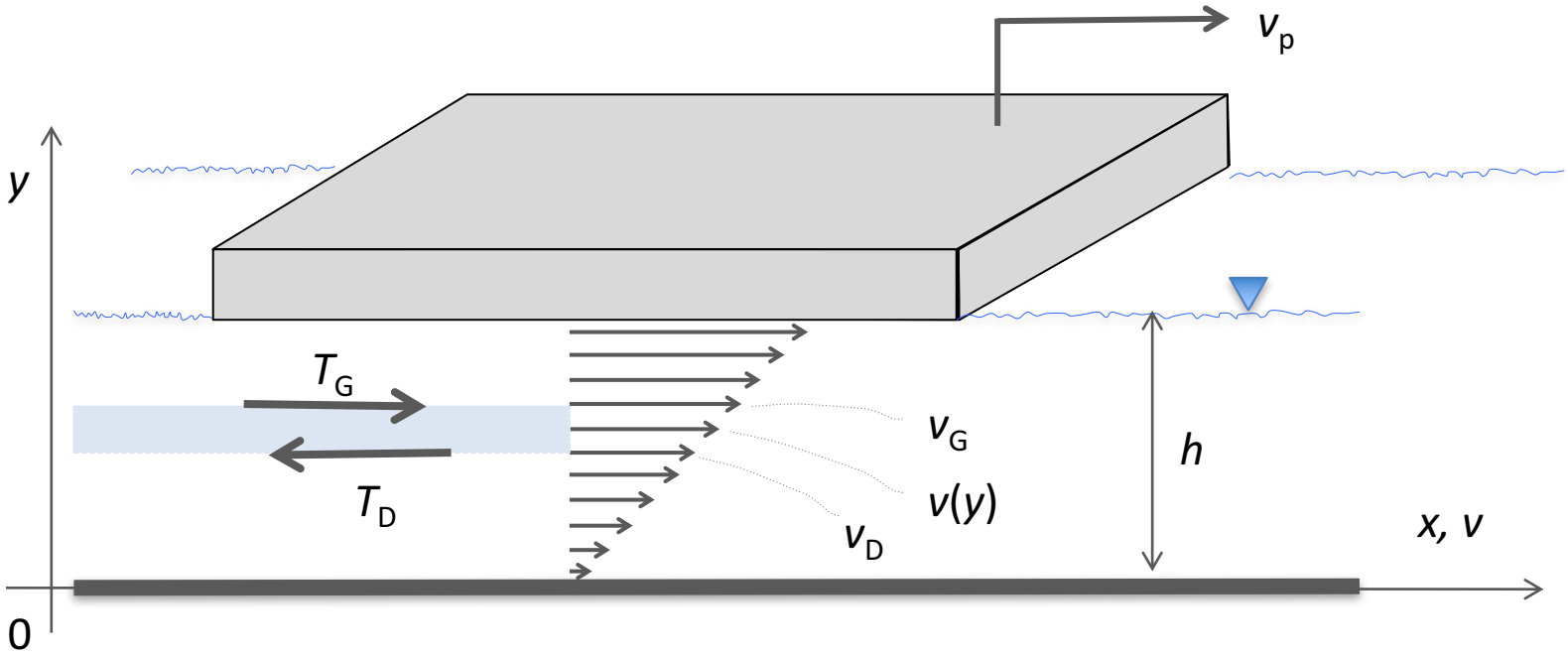
i na warstwy sąsiednie







$$v(0) = 0, \quad v(h) = v_p$$



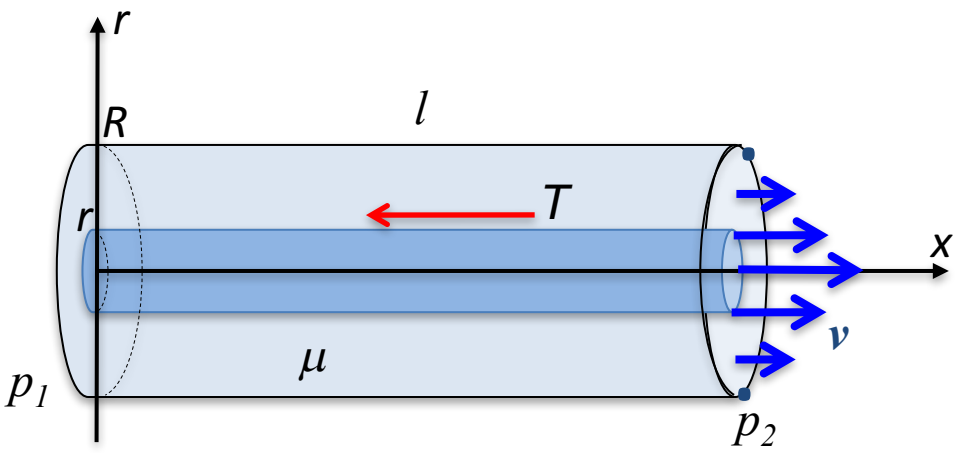
$T_g = T_d$ czyli suma sił działających na warstwę płynu jest równa zeru (ruch ustalony warstwy)

$$T_g = \mu A\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)_g = T_d = \mu A\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)_d$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)_g = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)_d \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \text{const.}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = c \quad \rightarrow \quad v = yc + c_1 \qquad \left.\begin{array}{l} y = 0 \rightarrow v = 0 \\ y = h \rightarrow v = v_p \end{array}\right\} \text{warunki brzegowe}$$

więc $c_1 = 0, c = \frac{v_p}{h}$ ⟶ a zatem $\boxed{v(y) = \left(\frac{v_p}{h}\right) \cdot y}$ jest funkcją liniową.



$F_p = \Pi r^2 \cdot \Delta p \qquad \Delta p = p_1 - p_2$

$T = -\mu 2\Pi r l \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$

założenie: $v(0) = v_{\max}, v(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0$

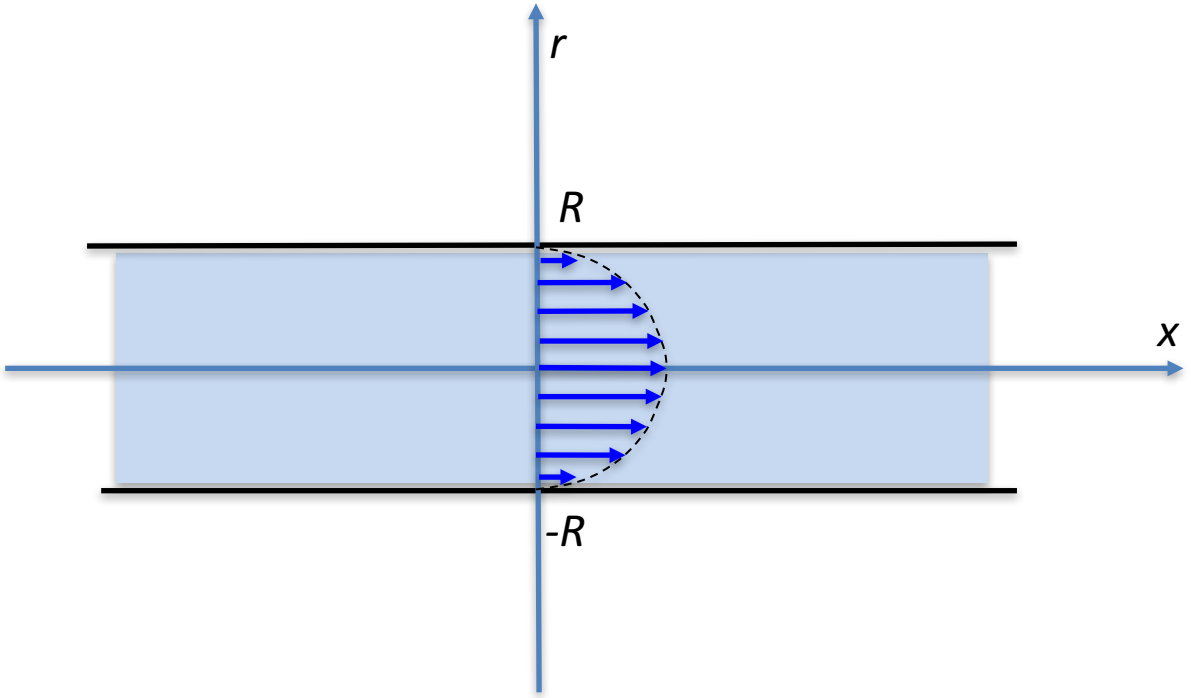
Z przyjętego założenia $\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0\right)$ wynika znak „-" we wzorze na siłę tarcia T.

$F_p = T \quad \rightarrow \quad \boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{r\Delta p}{2\mu l}}$

po scałkowaniu

$v = -\dfrac{r^2}{4}\dfrac{\Delta p}{\mu l} + c$, a uwzględniając warunek $r = R \quad \rightarrow \quad v = 0$

$c = \dfrac{R^2 \Delta p}{4\mu l}$ i ostatecznie $\boxed{v = \dfrac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right)}$

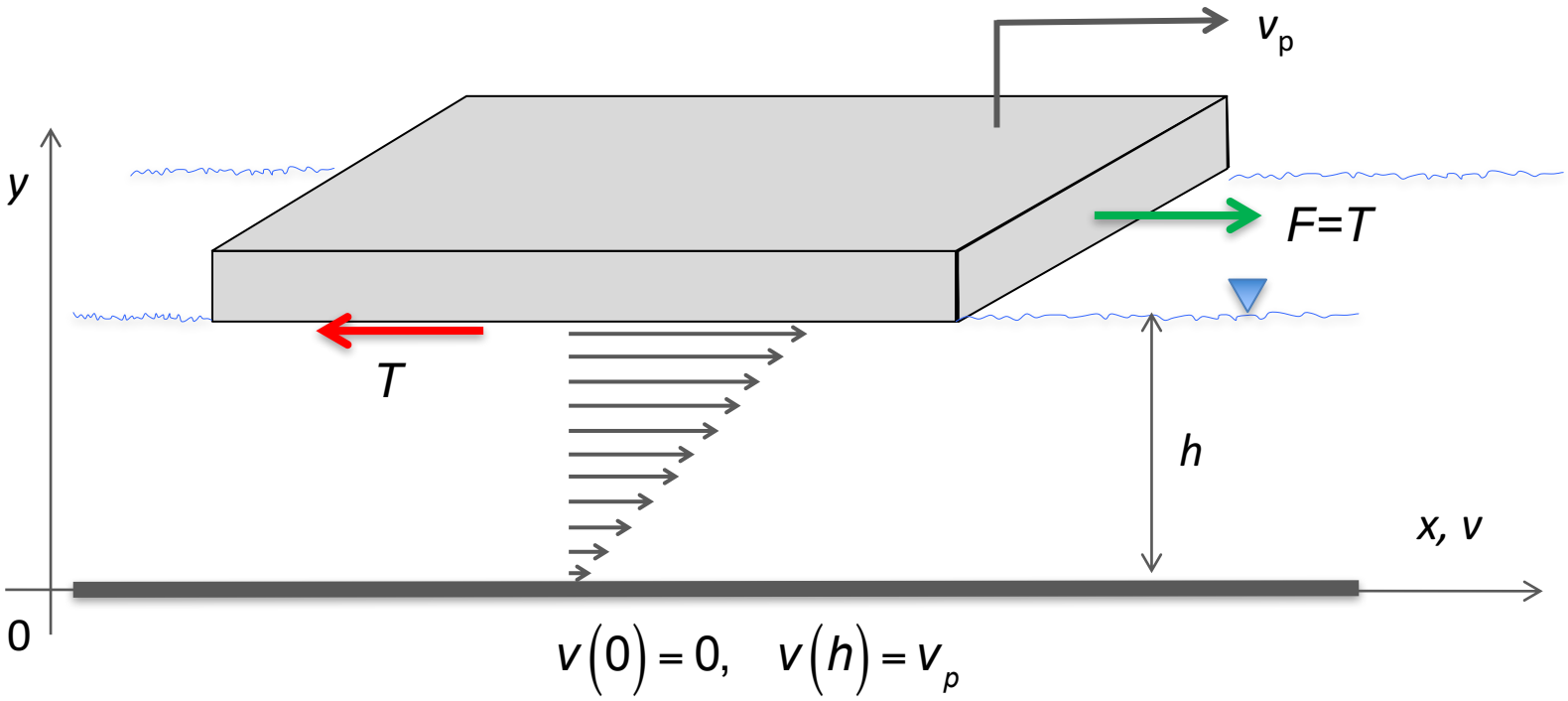


$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right)$$

paraboliczny rozkład prędkości (paraboloida obrotowa)

$$v_{max} = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$$

Siła tarcia działająca na płytkę poruszającą się po powierzchni cieczy



$$F = T = \mu A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{v_p}{h}$$

$$F = \mu A \frac{v_p}{h} = \left(\frac{\mu A}{h}\right) \cdot v_p$$

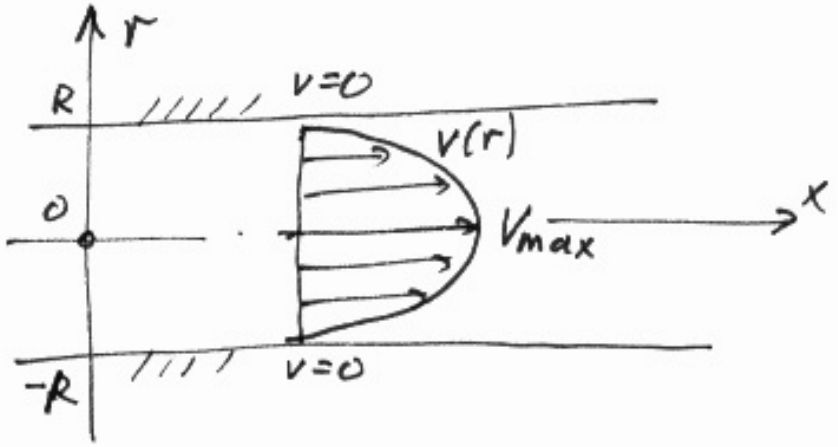
$\boxed{F = b \cdot v_p}$ i $b = \frac{\mu A}{h}$

tarcie płynne (siła proporcjonalna do prędkości)

W ustalonym przepływie laminarnym cieczy lepkiej przez rurę kołową profil prędkości ma kształt paraboloidy obrotowej o równaniu

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right)$$

Δp – różnica ciśnień
μ – dynamiczny współczynnik lepkości
l – długość rury
R – promień rury



$v_{max} = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$ występuje dla $r = 0$.

Jaka będzie prędkość rozważanego przepływu przy założeniu stałego rozkładu prędkości i tej samej wartości natężenia przepływu? (problem średniej wartości prędkości przepływu)

Natężenie przepływu w strudze o powierzchni przekroju dA wynosi $dq = dA \cdot v$. Stąd

$q = \int_A v\, dA =$ objętość paraboloidy obrotowej

$$q = \pi R^2 \cdot v_{max} \cdot \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu l}$$

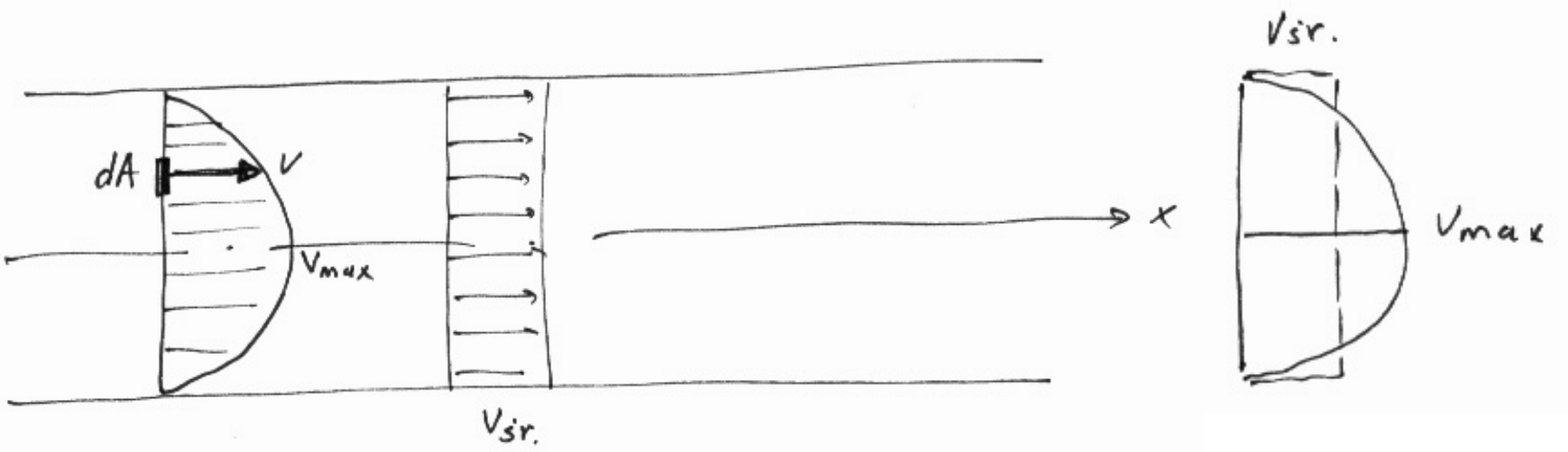
Przy przepływie ze stałym rozkładem prędkości $v(r) = v_{sr.} = \text{const}$

$$q = \pi R^2 v_{sr.}$$

Z przyrównania dostajemy

$$q = \pi R^2 v_{sr.} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \mu l}$$

$$v_{sr.} = \frac{R^2 \Delta p}{8 \mu l} = \frac{1}{2} v_{max}$$

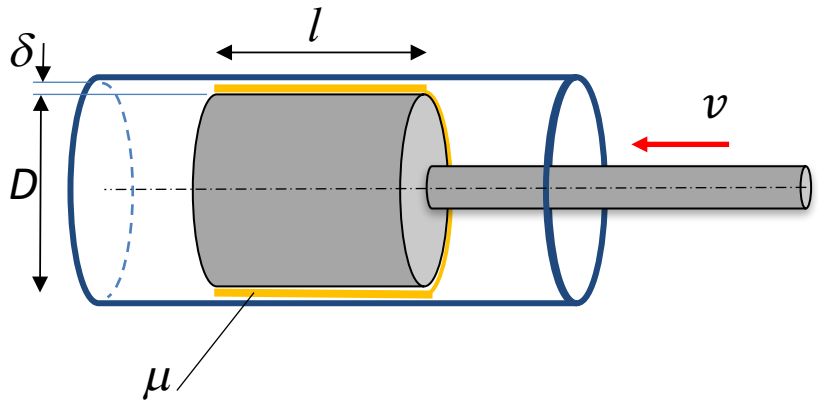


Zadanie

Obliczyć opór tarcia T podczas ruchu tłoka w cylindrze

$v, D, L, \delta, \mu; \quad T = ?$

(założenie: liniowy profil prędkości)



$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{v}{\delta}, \quad A = \Pi DL$$

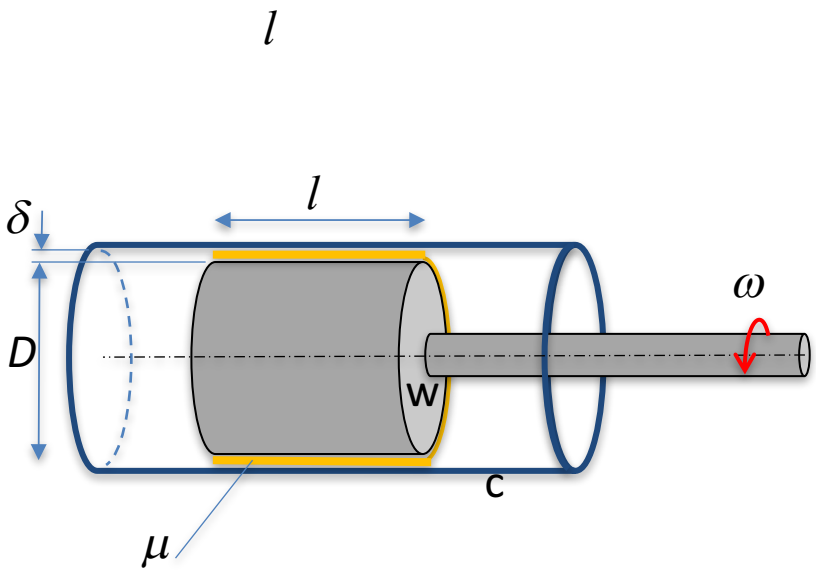
$$T = \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \cdot A$$

$$\boxed{T = \mu \frac{v}{\delta} \Pi DL}$$

Zadanie

Wyprowadzić wzór na moment obrotowy tarcia M_T z przybliżonym założeniem liniowego profilu prędkości w szczelinie

$$\omega, r, \delta, \mu, L; \quad M_T = ?$$



$$\frac{dv}{dr} = \frac{\omega r}{\delta}, \quad A = 2\Pi r L, \quad T = \mu \frac{dv}{dr} A$$

$$M_T = T \cdot r; \qquad \boxed{M_T = \frac{\mu \omega 2\Pi r^3 L}{\delta}}$$

Zadanie

Ciecz o gęstości $\rho = 750\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ i lepkości dynamicznej $\mu = 3\cdot 10^{-2}\text{Pa}\cdot\text{s}$. Wyznaczyć jej lepkość kinematyczną ν.

$\boxed{\rho, \mu; \quad \nu = ?}$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$\boxed{\nu = 0{,}392\cdot 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}}$

MECHANIKA PŁYNÓW

STRATY LINIOWE I MIEJSCOWE

Przepływy wewnętrzne (w rurociągach)

Wyróżnia się następujące modele płynu:

- płyn nielepki i nieściśliwy, zwany cieczą doskonałą,
- płyn nielepki i ściśliwy,
- płyn lepki i nieściśliwy,
- płyn lepki i ściśliwy, czyli płyn rzeczywisty.

W mechanice płynów wszystkie zagadnienia równowagi i ruchu płynów są rozpatrywane po przyjęciu jednego z wymienionych modeli i z tego wynika istotny podział mechaniki płynów. Jako umowny może być zatem traktowany historyczny podział na *hydromechanikę* – mechanikę cieczy i *aeromechanikę* – mechanikę gazów.

Mechanika ośrodków ściśliwych (dynamika gazów, aerodynamika dużych prędkości) zazębia się z termodynamiką poprzez zagadnienia przemian cieplnych zachodzących w przepływającym gazie, a hydromechanika i aeromechanika umiarkowanych prędkości łączy się z modelem płynu nieściśliwego i w tych zagadnieniach zjawiska cieplne odgrywają rolę drugorzędną.

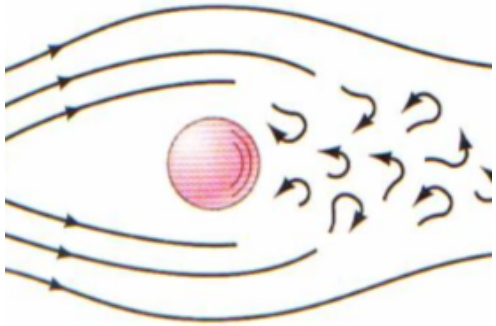
RODZAJE PRZEPŁYWÓW

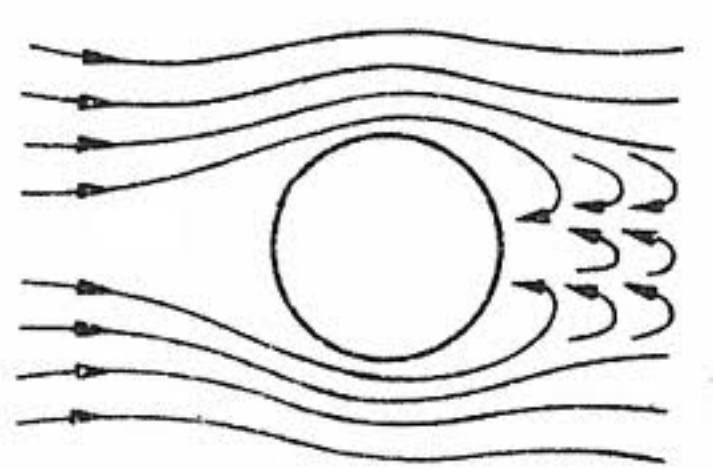
Przepływ laminarny i turbulentny

Przepływ jest *laminarny* (uwarstwiony), gdy elementy płynu poruszają się w warstwach. W przepływie *turbulentnym* (burzliwym), oprócz ruchu głównego (w kierunku przepływu), występują fluktuacje parametrów hydrodynamicznych (prędkości, ciśnienia). Te dwa rodzaje przepływów mogą być obserwowane np. przy wypływie strużki



(a)





Liczba Reynoldsa Re wyraża stosunek siły bezwładności do siły lepkości (tarcia)

$$\mathrm{Re} = \frac{v\,l}{\nu}.$$

Małym wartościom liczb Reynoldsa odpowiadają przepływy, w których dominują siły lepkości, nazwane przepływami laminarnymi. Duże wartości liczby Re są natomiast związane z przepływami, w których siły lepkości są małe w porównaniu z siłami bezwładności – nazwanymi przepływami turbulentnymi.

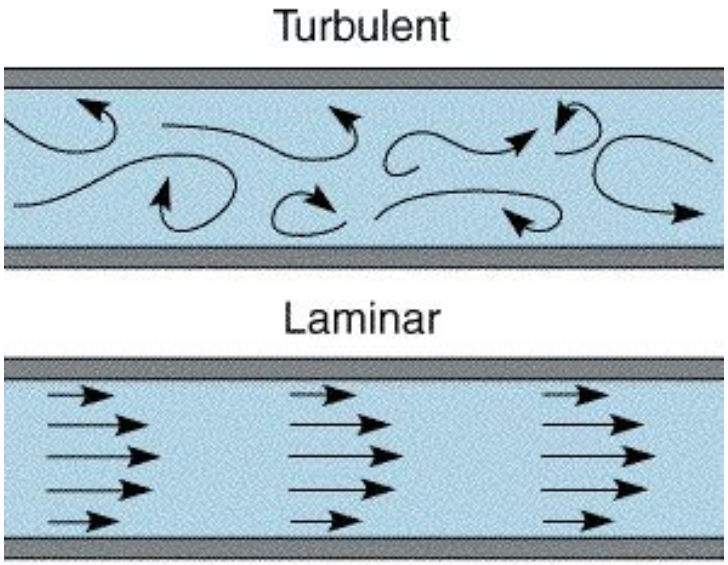
Krytyczna wartość liczby Reynoldsa

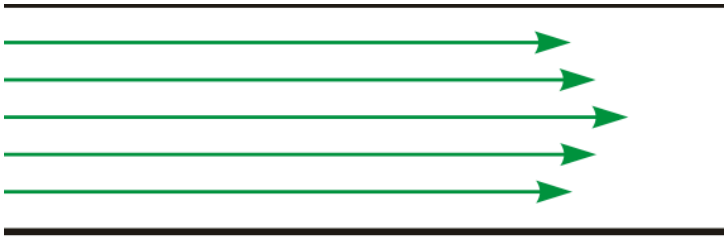
Dla przewodów kołowych krytyczna wartość liczby Reynoldsa wynosi $\mathrm{Re}_{kryt} = 2320$.

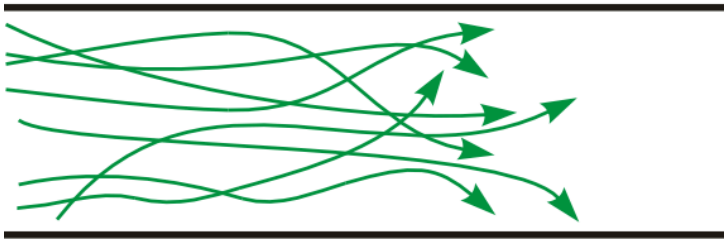
Wartość to rozgranicza przepływ laminarny od turbulentnego

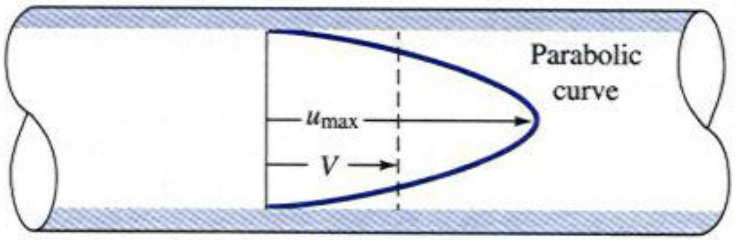
Re<2320, ruch laminarny

Re>2320, ruch burzliwy

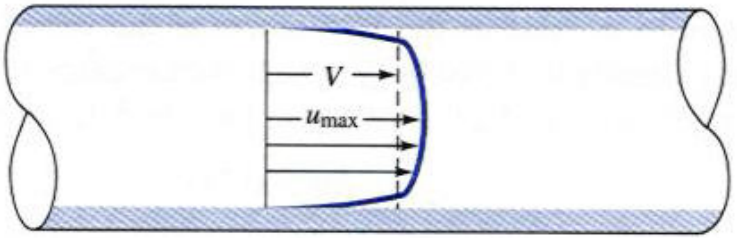




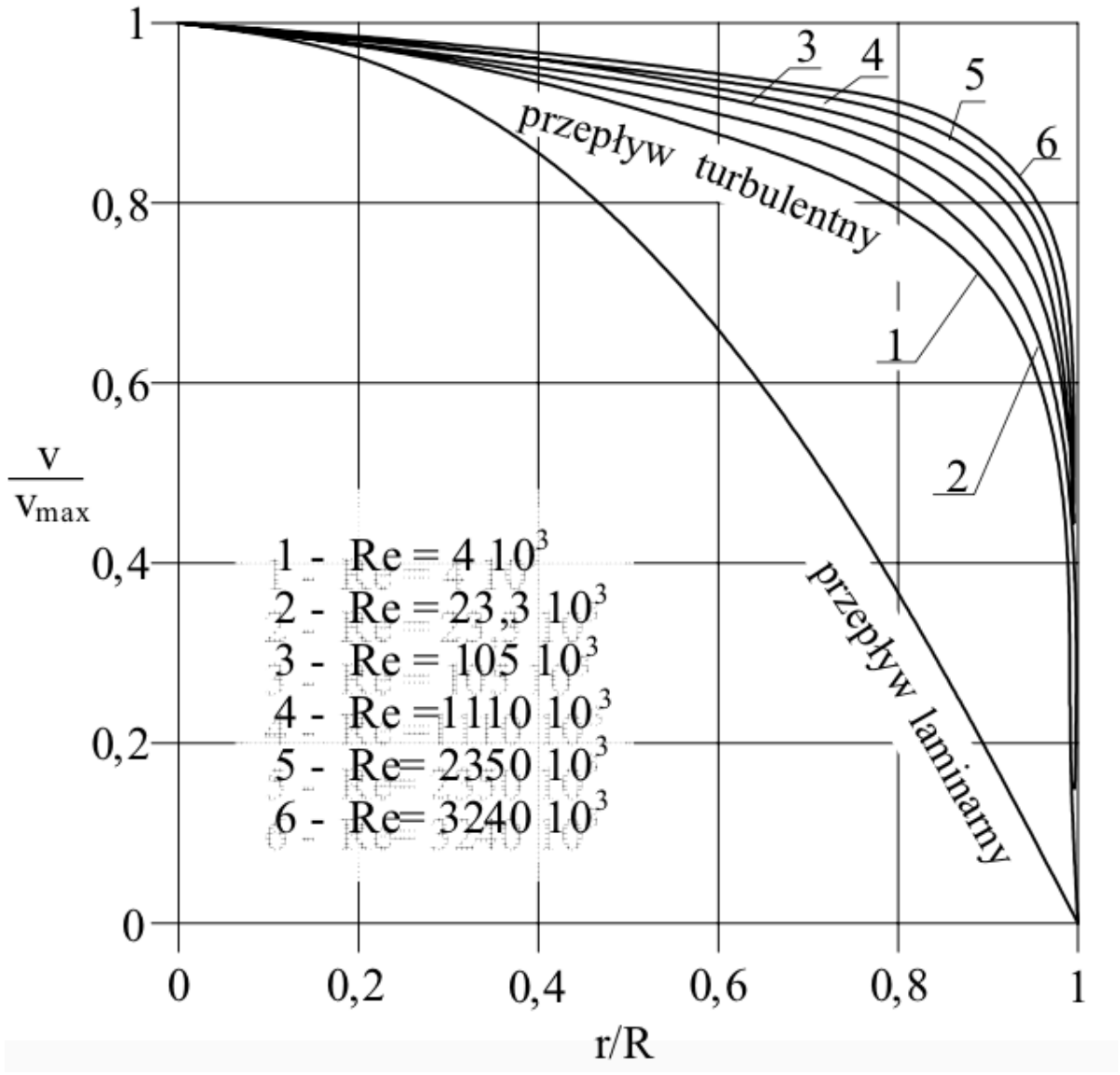




(*a*)



(*b*)


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
r/R
v / vmax
przepływ turbulentny
przepływ laminarny
1
2
3
4
5
6
1 - Re = 4 10^3
2 - Re = 23,3 10^3
3 - Re = 105 10^3
4 - Re = 1110 10^3
5 - Re = 2350 10^3
6 - Re = 3240 10^3

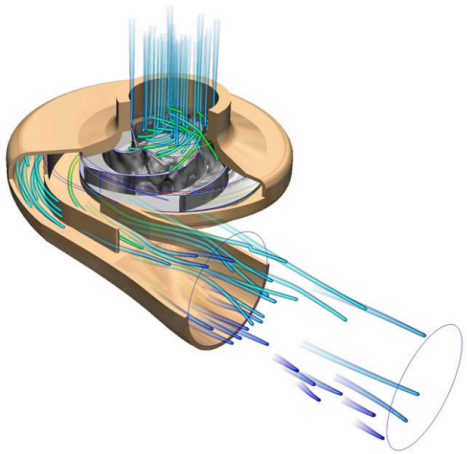
Przepływ ustalony i nieustalony

Przepływ jest *ustalony*, jeśli wszystkie parametry ruchu są niezależne od czasu. Oznacza to, że ciśnienie, prędkość, gęstość przepływu ustalonego w dowolnym punkcie przestrzeni nie zmieniają się z upływem czasu.

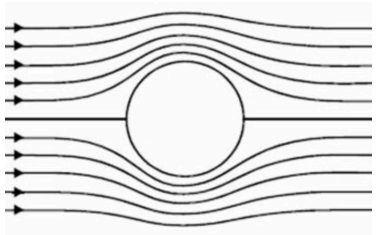
W przepływie *nieustalonym* parametry ruchu zależą od czasu. Do tej kategorii przepływów należą wszystkie zjawiska rozprzestrzeniania się fal w płynie oraz przepływy w atmosferze.

MECHANIKA PŁYNÓW

3D

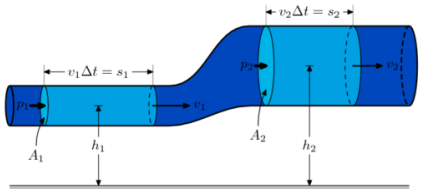


2D



1D

(HYDRAULIKA)

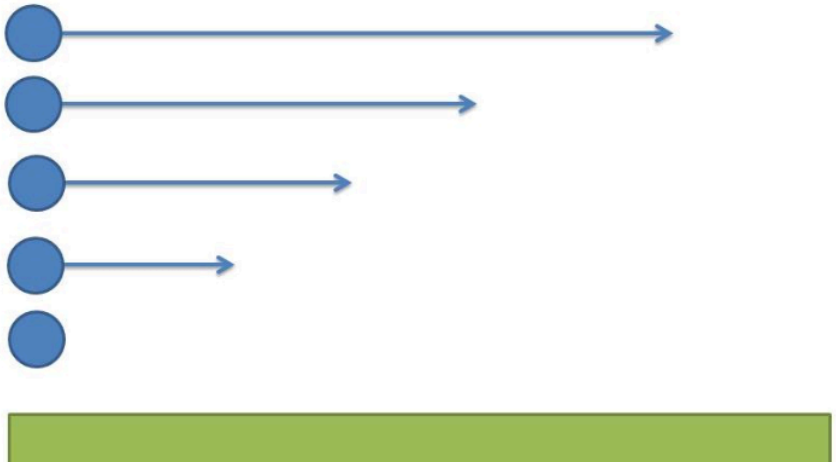


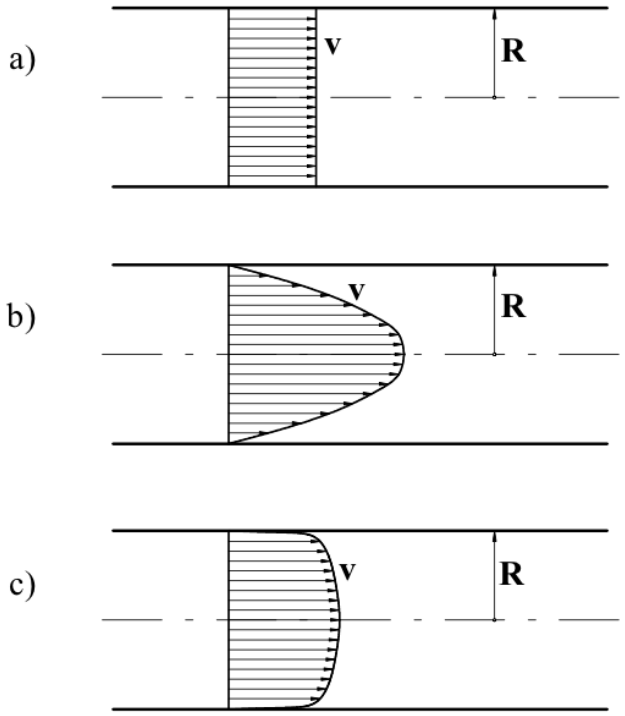
Przepływ jednowymiarowy

Przepływ określa się jako *jednowymiarowy*, gdy w przekroju poprzecznym strugi charakteryzujące go parametry są stałe. Oznacza to, że wartości tych parametrów zależą tylko od jednej współrzędnej położenia. Koncepcja przepływu jednowymiarowego, umożliwiająca uproszczenie wielu opisów przepływu, jest koncepcją bardzo użyteczną w zagadnieniach technicznych.

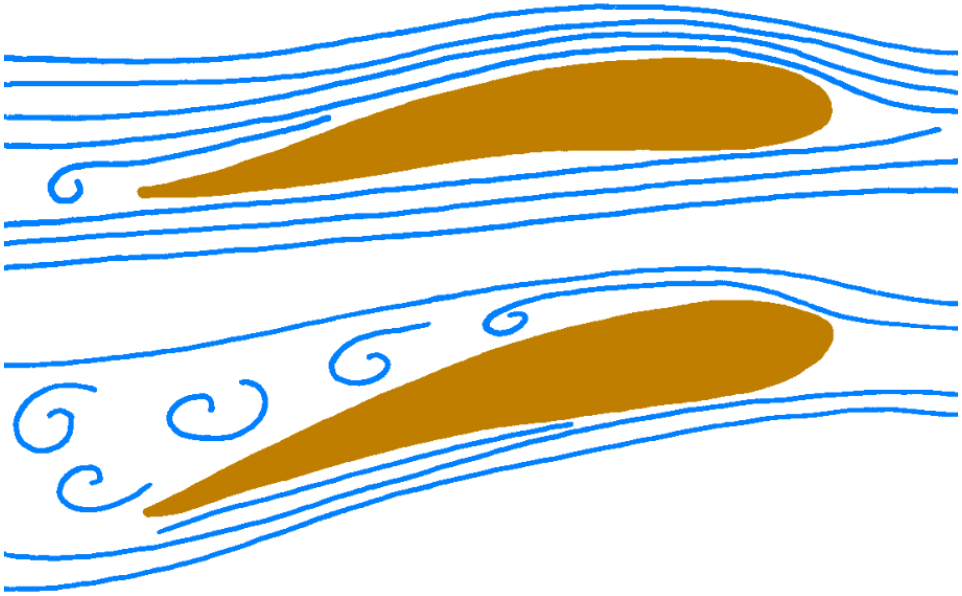
Warstwa przyścienna

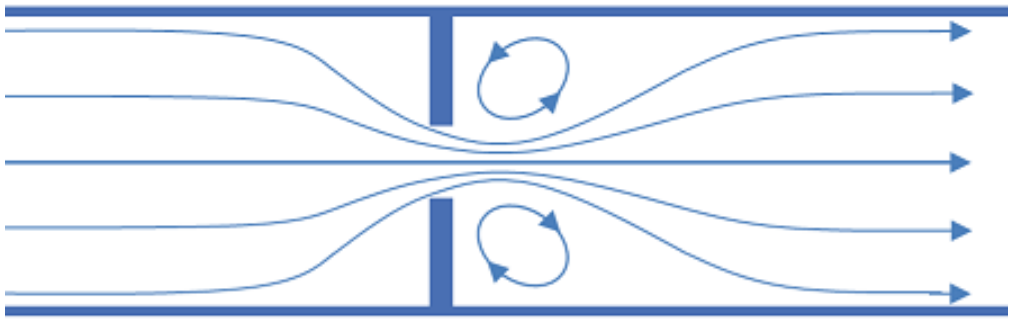
Rozważając w pełni rozwinięty przepływ płynu w rurociągu (kanale), należy zwrócić uwagę na rozkład (profil) prędkości w dowolnym przekroju poprzecznym . Na skutek działania sił przylegania (adhezji) prędkości na powierzchni ściany są równe zeru. Oddalając się od ściany w głąb strugi prędkości te gwałtownie rosną, a w części środkowej zmieniają się one łagodnie.



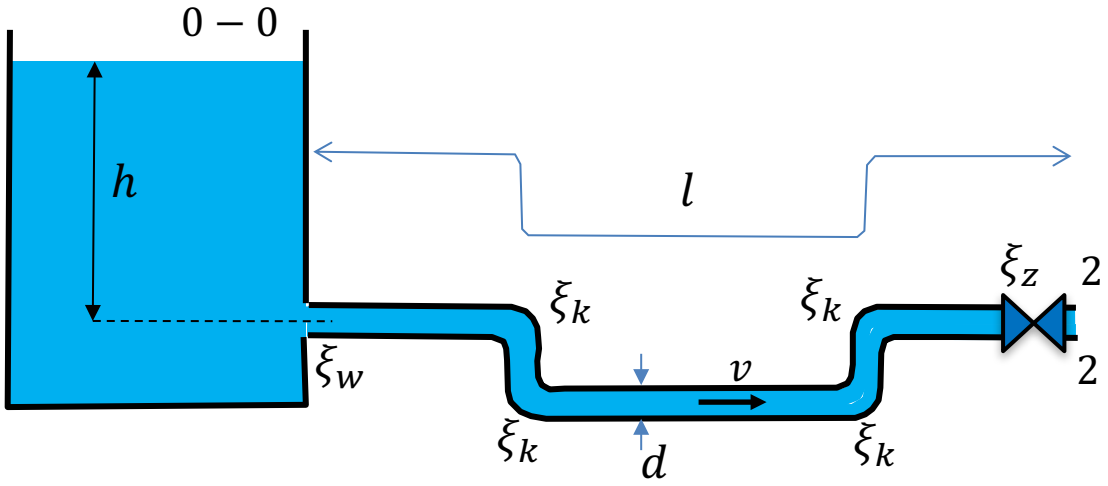


Schematy profili prędkości w przepływie przez przewód kołowy:
a) równomierny, b) paraboliczny, c) w pełni turbulentny









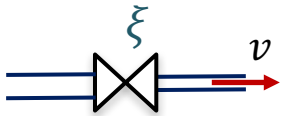
$$\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\gamma}+h_0 > \frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+h_2$$

$$\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\gamma}+h_0 = \frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+h_2+h_{str.}$$

$$h_{str}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\sum\xi_i\frac{v^2}{2g}$$

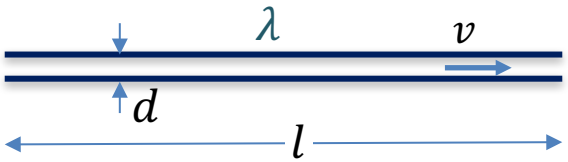
ξ – *współczynnik strat miejscowych*

$$h_{str}=\xi\frac{v^2}{2g}$$



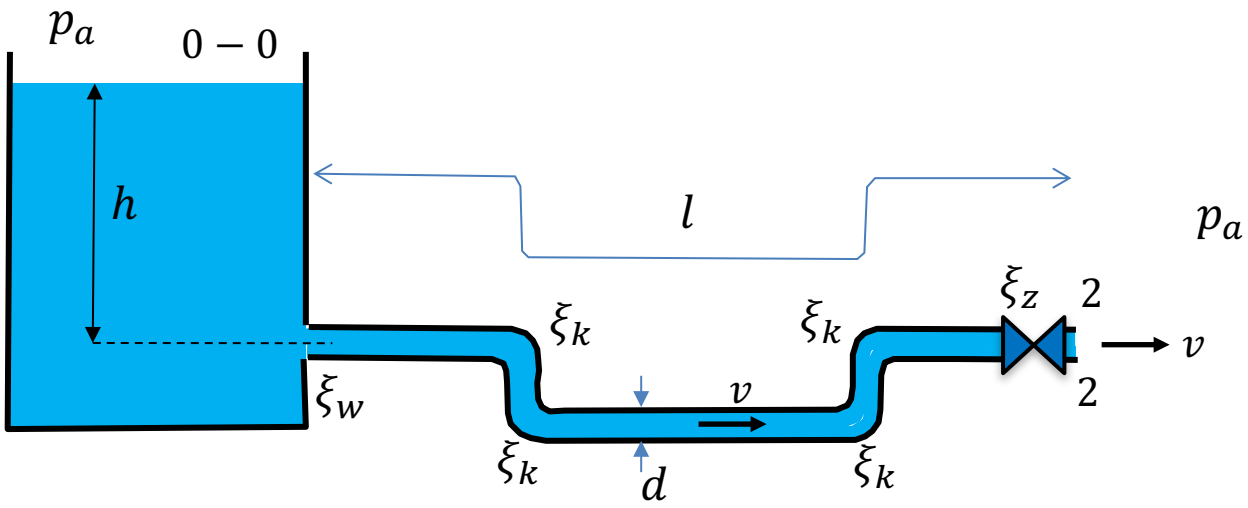
STRATY MIEJSCOWE

λ – *współczynnik strat tarcia*



$$h_{str}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

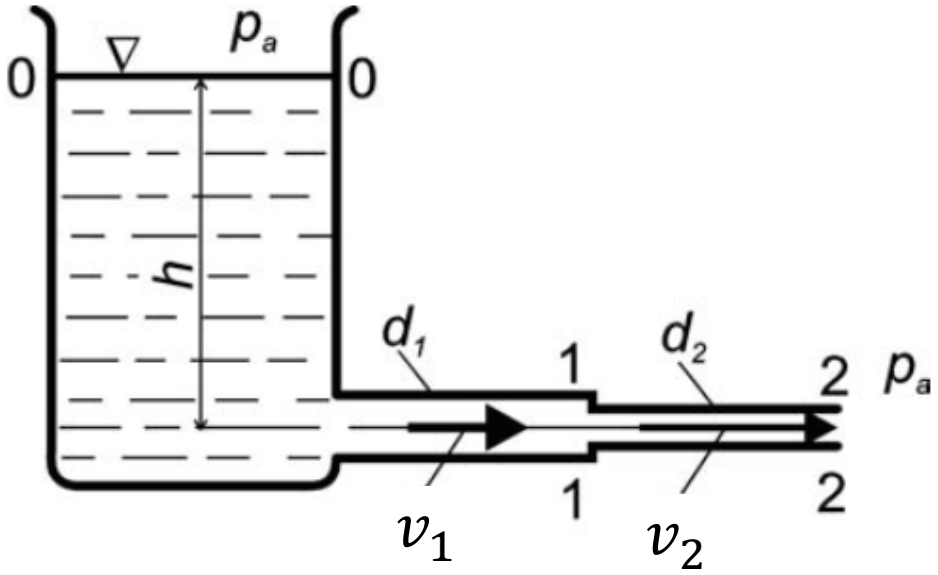
STRATY TARCIA



$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h_0 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + h_{str.}$$

$$\frac{p_a}{\gamma} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + h_{str.}$$

$$h_{str} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_w \frac{v^2}{2g} + 4\xi_k \frac{v^2}{2g} + \xi_z \frac{v^2}{2g}$$



Dane:

$d_1 = 30$ mm

$d_2 = 20$ mm

$h = 4$ m

$p_a = 100$ kN/m^2 $= 100000$ Pa

Wyznaczyć:

v_1, v_2, p_1, p_2

Równanie Bernoulliego 0-2

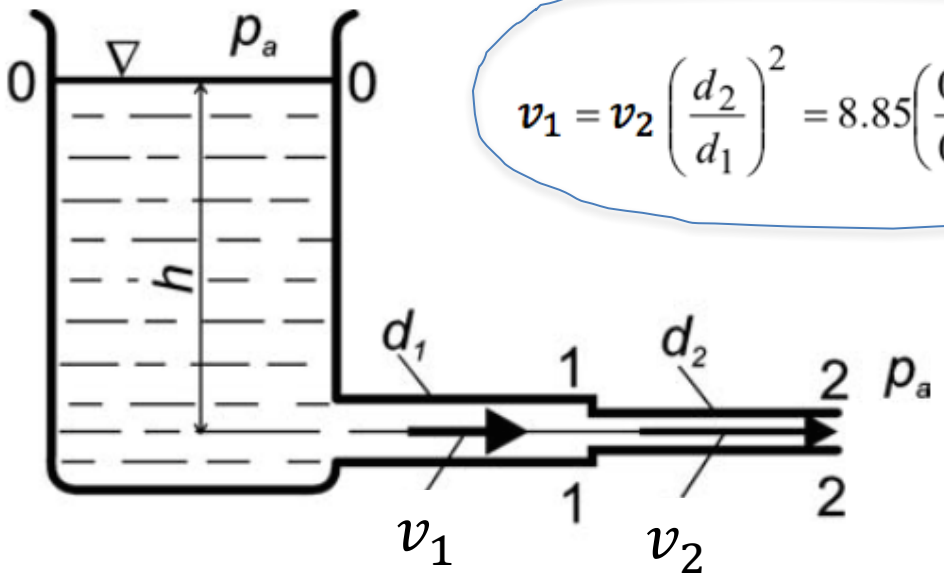
$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + h = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + 0$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 4} = 8.85 \frac{m}{s}$$

Równanie ciągłości przepływu

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 ,$$

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 8.85 \left(\frac{0.02}{0.03} \right)^2 = 3.94 \frac{m}{s}$$



$$v_1 = v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 8.85\left(\frac{0.02}{0.03}\right)^2 = 3.94\ \frac{m}{s}$$

Dane:
$d_1 = 30$ mm
$d_2 = 20$ mm
$h = 4$ m
p_a=100 kN/m^2 =100000 Pa

Wyznaczyć:
v_1, v_2, p_1, p_2

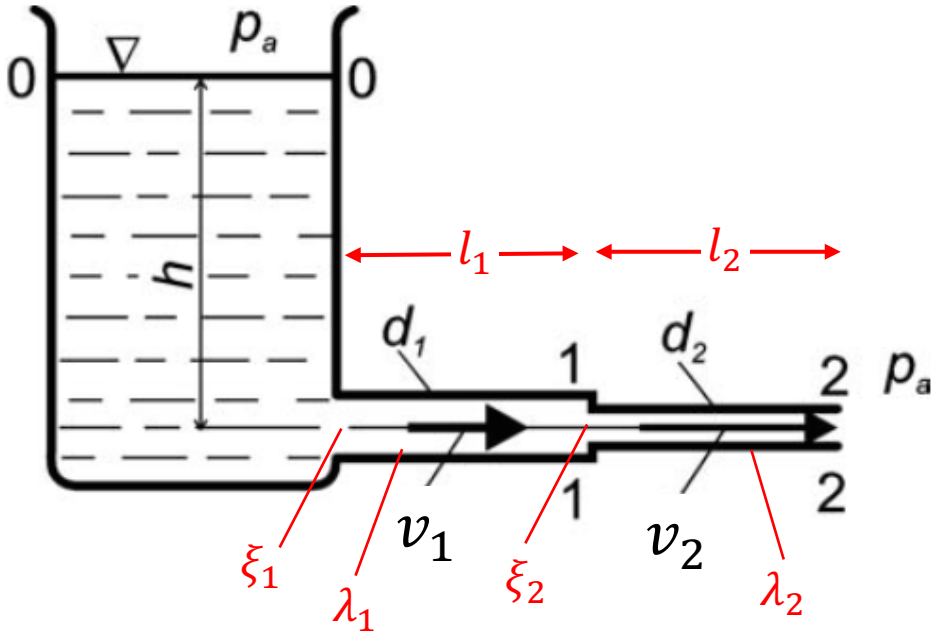
Równanie Bernoulliego 0-1

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + h = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + 0$$

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h + p_a - \frac{\rho v_1^2}{2} = 1000 \cdot 9.81 \cdot 4 + 100000 - \frac{1000 \cdot 3.94^2}{2} = 132.1\ \frac{kN}{m^2} = p_1$$

$$p_{1n} = 32{,}1\ kN/m^2$$

$p_2 = p_a$ $\quad p_{2n} = 0$



$\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}03$

$\xi_1 = 0{,}5$

$\xi_2 = 0{,}9$

$l_1 = l_2 = 5m$

Dane:

$d_1 = 30$ mm

$d_2 = 20$ mm

$h = 4$ m

p_a=100 kN/m^2 =100000 Pa

Wyznaczyć:

v_1, v_2, p_1, p_2

0-2:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + h = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + 0 \quad + h_{str}$$

$$h_{str} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \xi_1 \frac{v_1^2}{2g} + \xi_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 ,$$

$$v_1 = 1{,}2276 \frac{m}{s} < 3{,}94 \frac{m}{s}$$

$$v_2 = 2{,}7621 \frac{m}{s} < 8{,}85\, m/s$$

$v_1 = 1{,}2276\ \frac{m}{s}$ $v_2 = 2{,}7621\ \frac{m}{s}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}03$

$\xi_1 = 0{,}5$

$\xi_2 = 0{,}9$

$l_1 = l_2 = 5m$

Dane:

$d_1 = 30$ mm

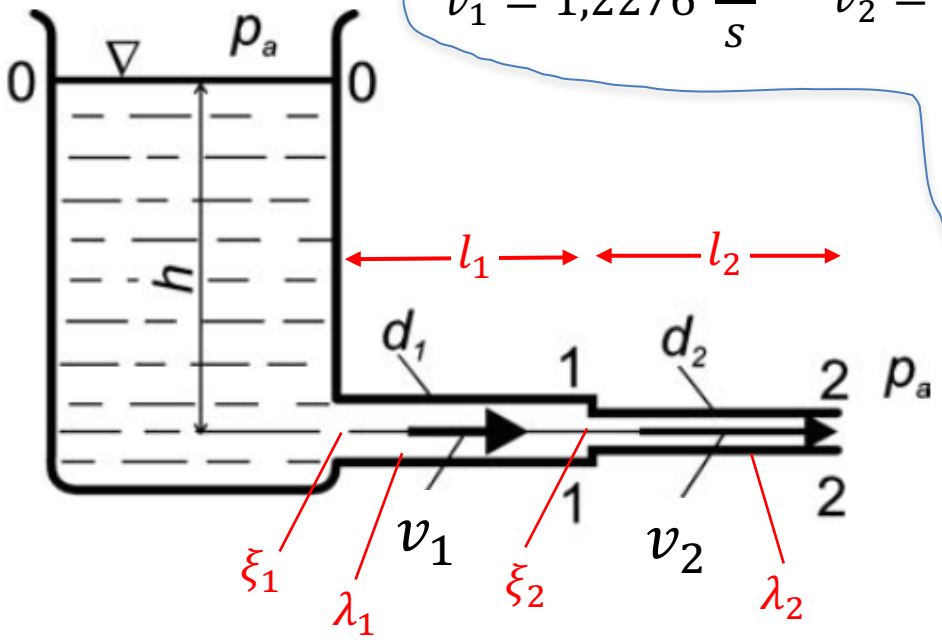
$d_2 = 20$ mm

$h = 4$ m

p_a=100 kN/m^2 =100000 Pa

Wyznaczyć:

v_1, v_2, p_1, p_2



0-1:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + h = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + 0 \ + h_{str}$$

$$h_{str} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \xi_1 \frac{v_1^2}{2g}$$

$$p_1 = 135{,}1\ \frac{kN}{m^2}$$

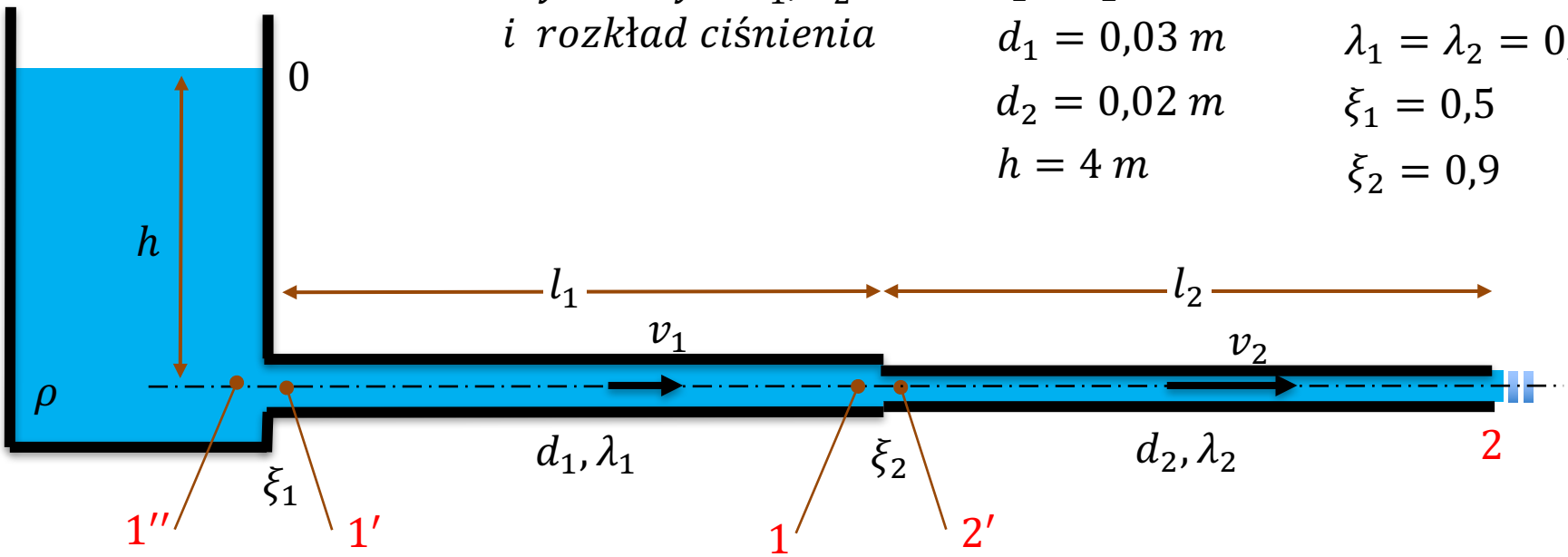
wyznaczyć: v_1, v_2
i rozkład ciśnienia

$l_1 = l_2 = 5\ m$ $\quad p_a = 100000\ Pa$

$d_1 = 0{,}03\ m$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}03$

$d_2 = 0{,}02\ m$ $\quad \xi_1 = 0{,}5$

$h = 4\ m$ $\quad \xi_2 = 0{,}9$



0-2:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + h = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g} + 0 + h_{str}$$

$$h_{str} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \xi_1 \frac{v_1^2}{2g} + \xi_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2,$$

$$v_1 = 1{,}2276\ \frac{m}{s} \quad < \quad 3{,}94\ \frac{m}{s}$$

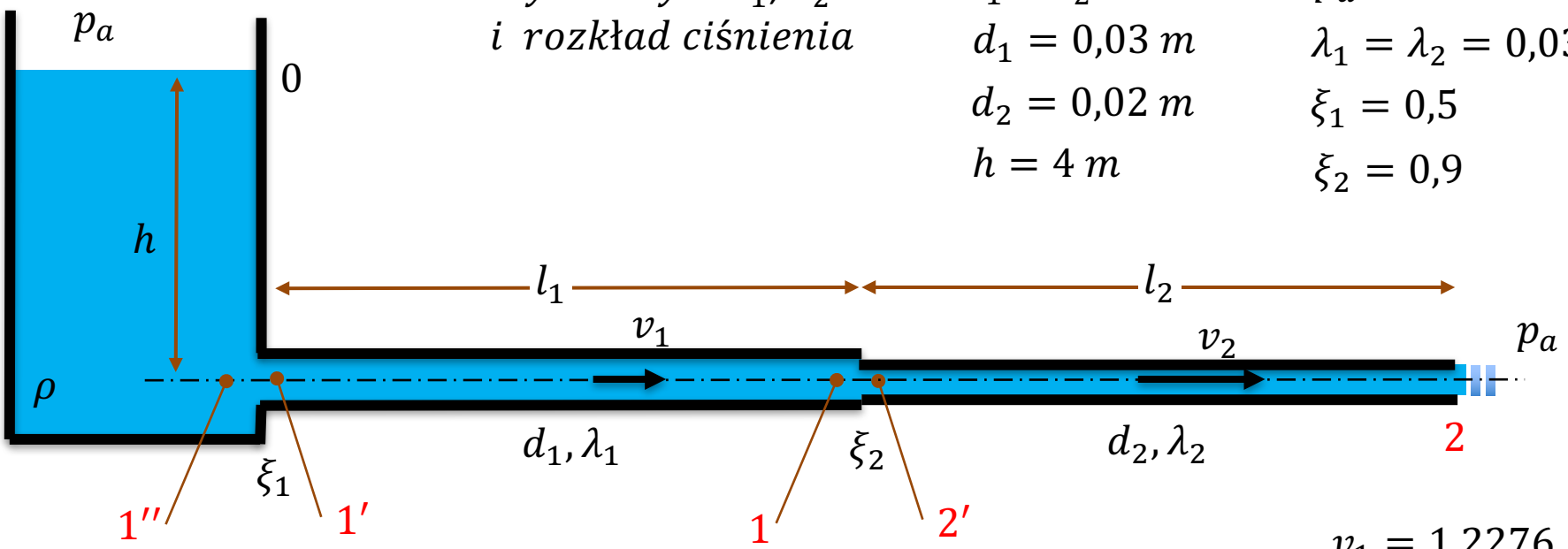
$$v_2 = 2{,}7621\ \frac{m}{s} \quad < \quad 8{,}85\ m/s$$

$$v_2 = 2{,}7621\ \frac{m}{s} \qquad v_1 = 1{,}2276\ \frac{m}{s}$$

wyznaczyć: v_1, v_2
i rozkład ciśnienia

$l_1 = l_2 = 5\ m$
$d_1 = 0{,}03\ m$
$d_2 = 0{,}02\ m$
$h = 4\ m$

$p_a = 100000\ Pa$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}03$
$\xi_1 = 0{,}5$
$\xi_2 = 0{,}9$



$v_1 = 1{,}2276\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 2{,}7621\ \frac{m}{s}$

$p_{1''} = p_a + h\rho g = 140000\ Pa$

$p_{1''} = 140000\ Pa$

$p_{1'} = 138870\ Pa$

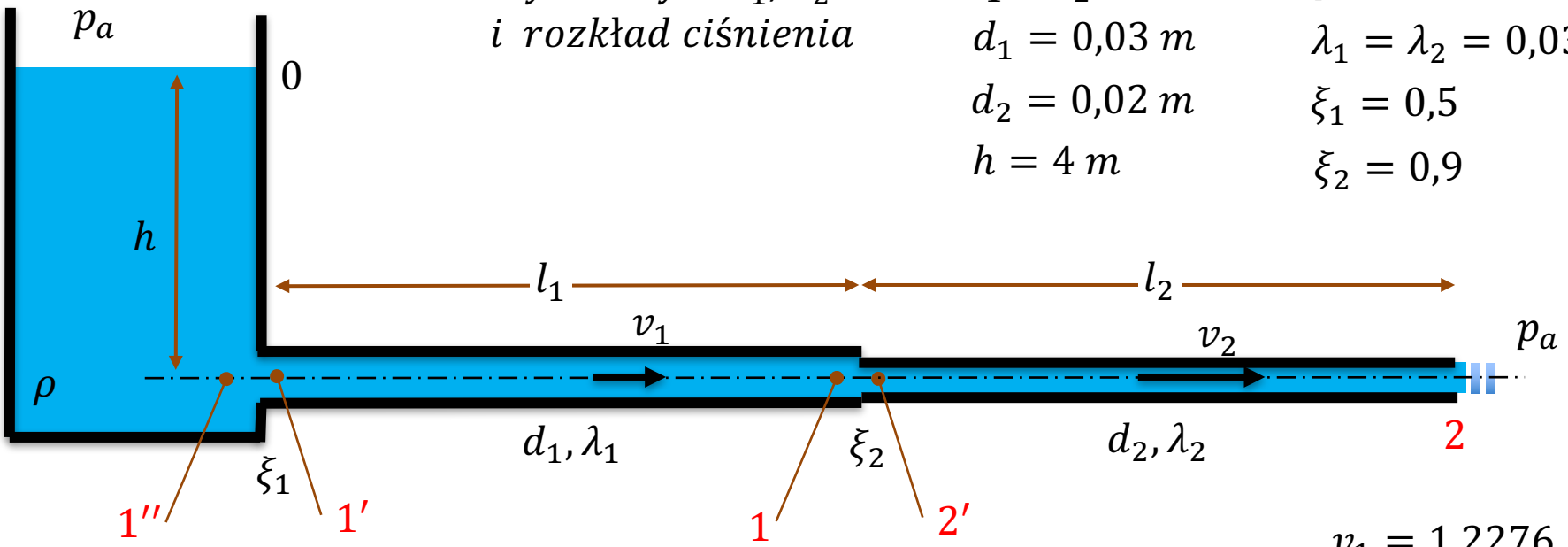
$1'' - 1'$ $\quad \frac{p_{1''}}{\rho g} = \frac{p_{1'}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \xi_1 \frac{v_1^2}{2g}$

$0 - 1'$ $\quad \frac{p_a}{\rho g} + h = \frac{p_{1'}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \xi_1 \frac{v_1^2}{2g}$

wyznaczyć: v_1, v_2
i rozkład ciśnienia

$l_1 = l_2 = 5\ m$
$d_1 = 0{,}03\ m$
$d_2 = 0{,}02\ m$
$h = 4\ m$

$p_a = 100000\ Pa$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}03$
$\xi_1 = 0{,}5$
$\xi_2 = 0{,}9$



$v_1 = 1{,}2276\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 2{,}7621\ \frac{m}{s}$

$p_{1''} = p_a + h\rho g = 140000\ Pa$

$p_{1''} = 140000\ Pa$

$1' - 1$ $\quad \frac{p_{1'}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g}$ $\quad \longrightarrow$

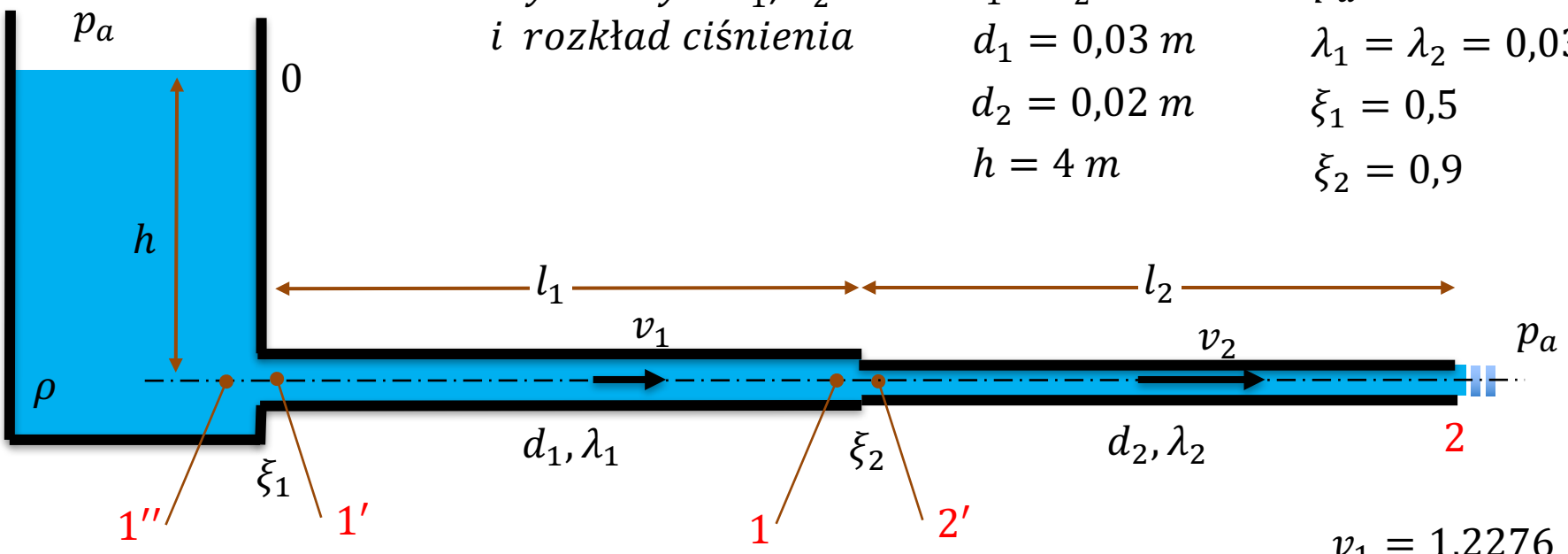
$p_{1'} = 138870\ Pa$

$p_1 = 135100\ Pa$

wyznaczyć: v_1, v_2
i rozkład ciśnienia

$l_1 = l_2 = 5\ m$
$d_1 = 0{,}03\ m$
$d_2 = 0{,}02\ m$
$h = 4\ m$

$p_a = 100000\ Pa$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}03$
$\xi_1 = 0{,}5$
$\xi_2 = 0{,}9$



$$v_1 = 1{,}2276\ \frac{m}{s}$$

$$v_2 = 2{,}7621\ \frac{m}{s}$$

$$p_{1''} = p_a + h\rho g = 140000\ Pa$$

$$p_{1''} = 140000\ Pa$$

$$p_{1'} = 138870\ Pa$$

$$p_1 = 135100\ Pa$$

$$p_{2'} = 128610\ Pa$$

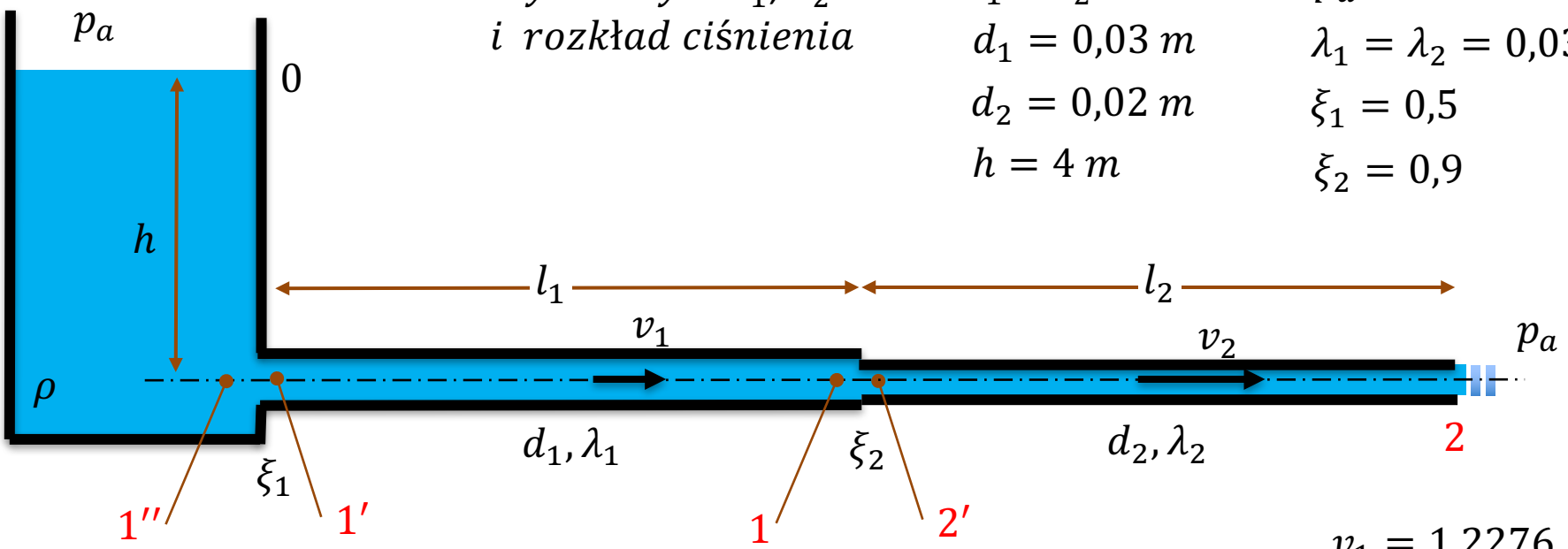
$1 - 2'$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{2'}}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \xi_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

wyznaczyć: v_1, v_2
i rozkład ciśnienia

$l_1 = l_2 = 5\ m$
$d_1 = 0{,}03\ m$
$d_2 = 0{,}02\ m$
$h = 4\ m$

$p_a = 100000\ Pa$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}03$
$\xi_1 = 0{,}5$
$\xi_2 = 0{,}9$



$$p_{1''} = p_a + h\rho g = 140000\ Pa$$

$$v_1 = 1{,}2276\ \frac{m}{s}$$

$$v_2 = 2{,}7621\ \frac{m}{s}$$

$p_{1''} = 140000\ Pa$

$p_{1'} = 138870\ Pa$

$p_1 = 135100\ Pa$

$p_{2'} = 128610\ Pa$

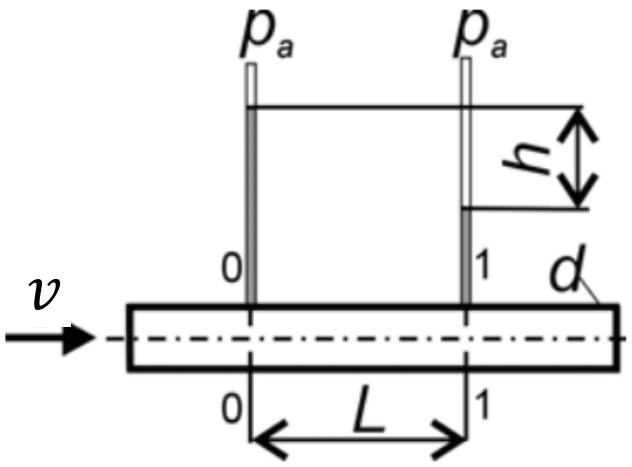
$2' - 2$ $\quad \frac{p_{2'}}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}$ $\longrightarrow$

$p_2 = 100000\ Pa$

W poziomym przewodzie o średnicy $d = 25$ mm zmierzono ciśnienie w dwóch przekrojach odległych o $L = 8$ m. Na podstawie różnicy wysokości ciśnień, która wynosiła $h = 770$ mmH$_2$O, obliczyć współczynnik strat tarcia λ, jeśli prędkość wody w przewodzie $v = 1{,}5\ m/s$

$v_0 = v_1 = v$

$h_0 = h_1 = 0$



Dane:

$d = 25$ mm

L = 8 m

$h = 770$ mmH$_2$O

$v = 1{,}5\ m/s$

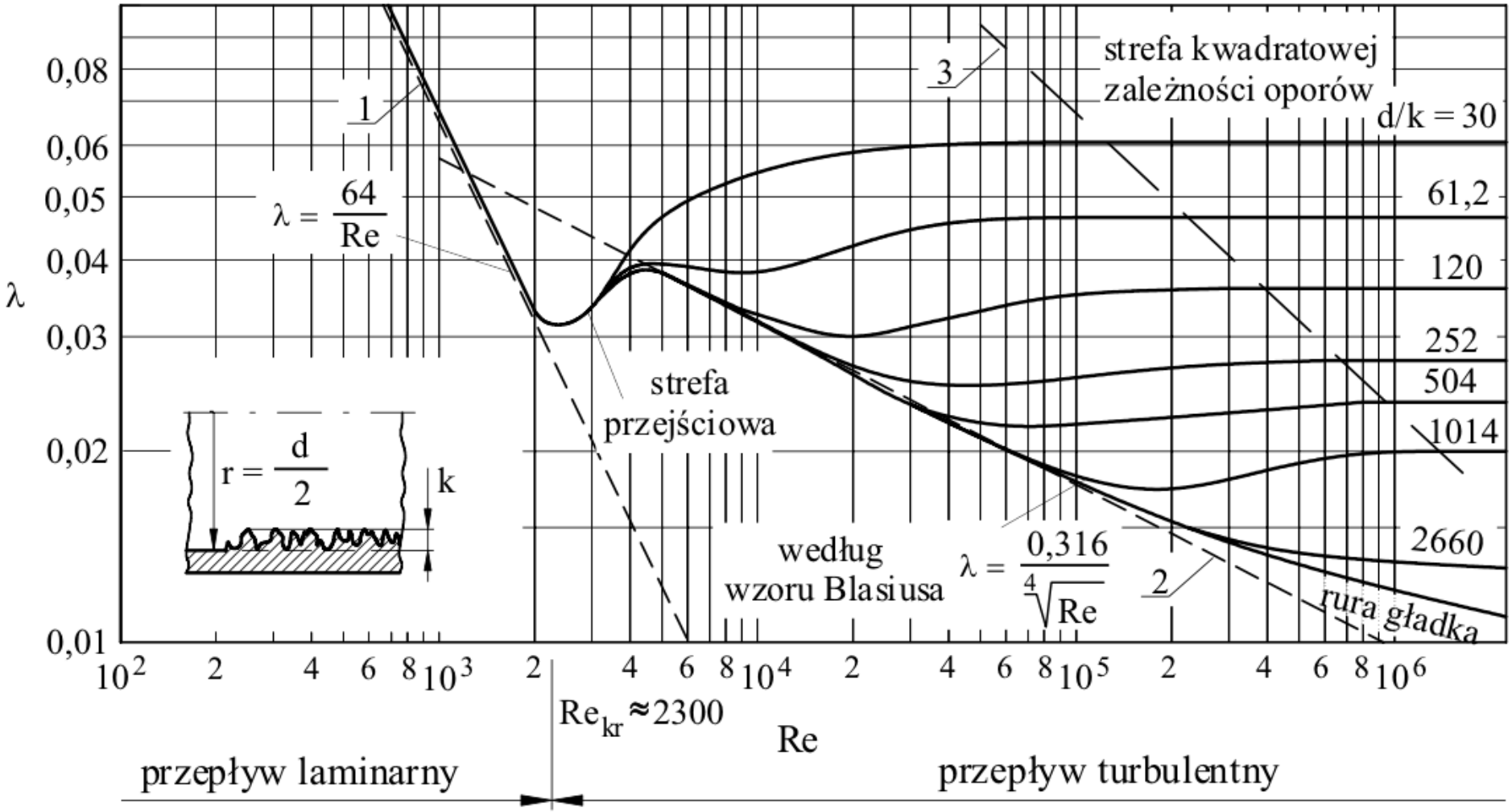
Wyznaczyć:

λ

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 + h_{str}$$

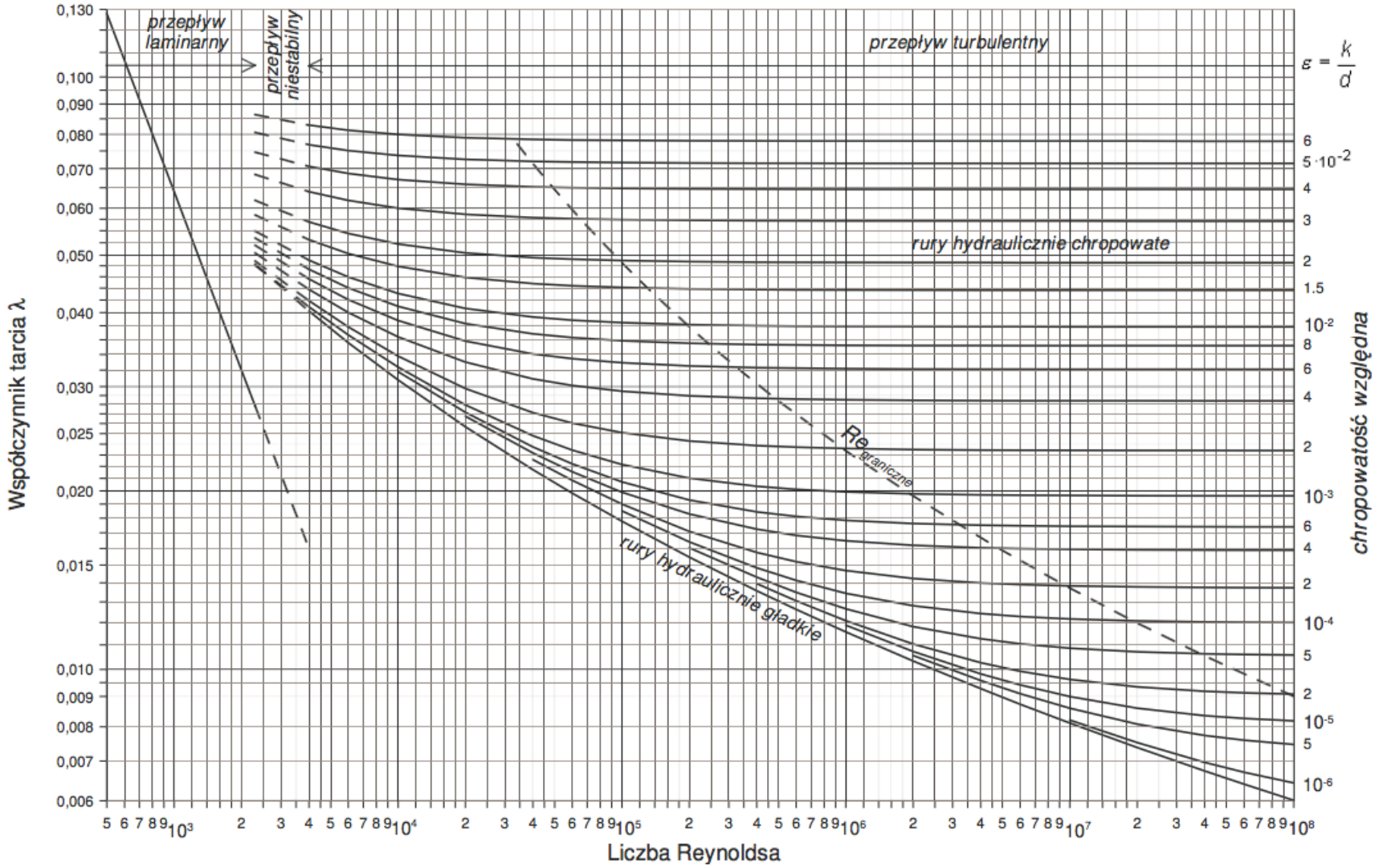
$$h_{str} = \frac{p_0 - p_1}{\rho \cdot g} = \frac{h \cdot \rho \cdot g}{\rho \cdot g} = 0.77\ m$$

$$h_{str} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2 \cdot g \cdot h_{str} \cdot d}{L\ v^2} = \frac{2 \cdot 9.81 \cdot 0.77 \cdot 0.025}{8 \cdot 1.5^2} = 0.021$$

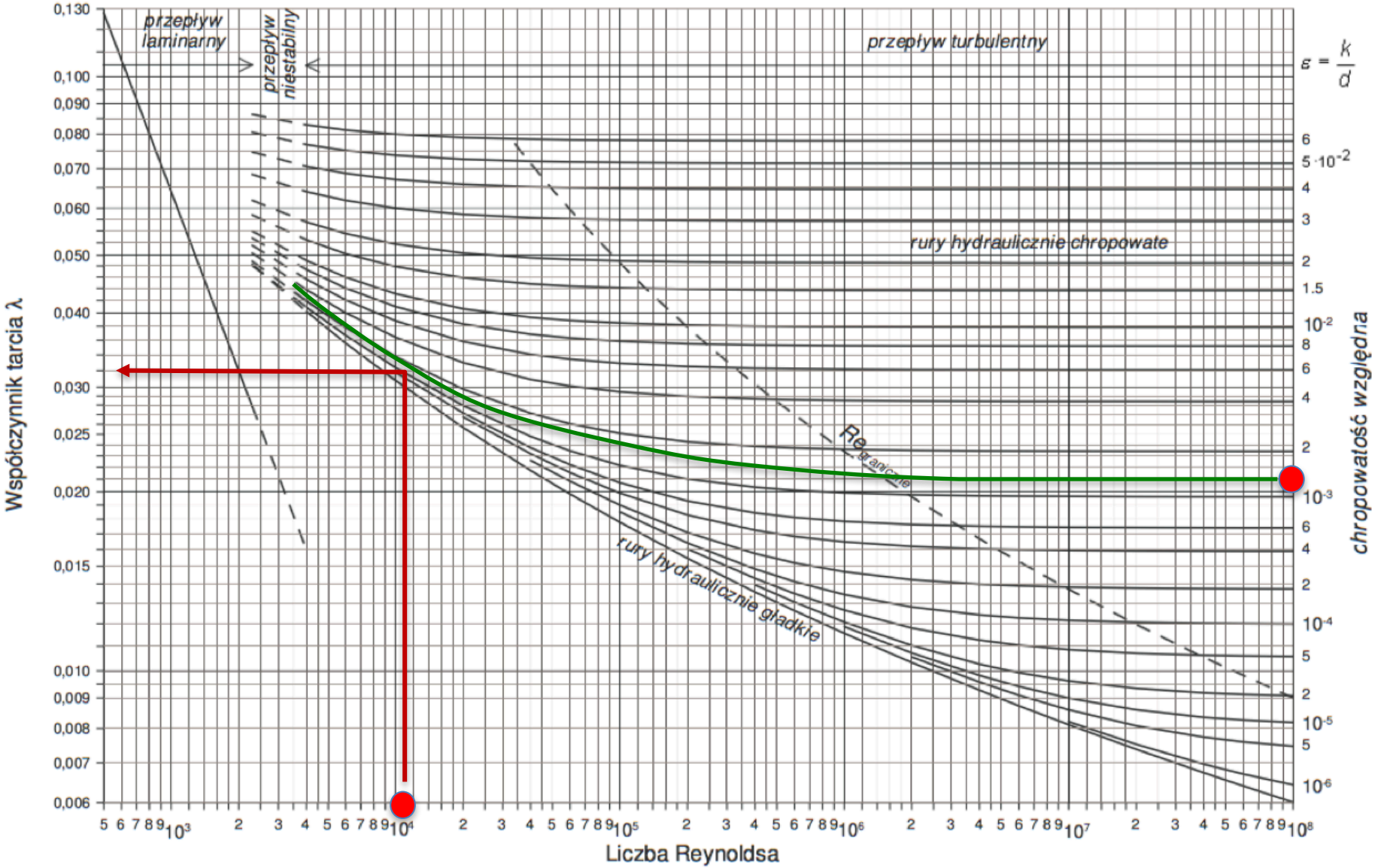


Zależność współczynnika oporu liniowego od liczby Reynoldsa – wykres (harfa) Nikuradsego

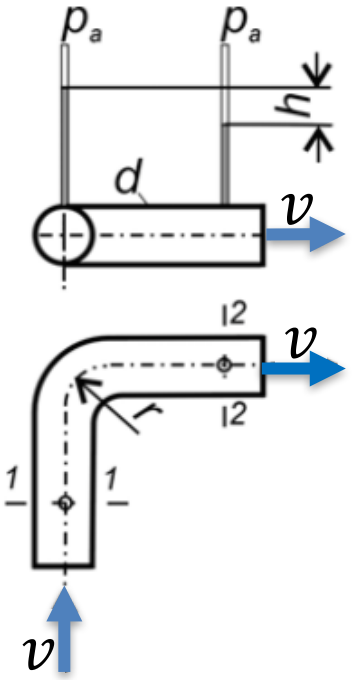
5.2. WYKRES MOODY'EGO (PN-76/M-34034)



5.2. WYKRES MOODY'EGO (PN-76/M-34034)



Przez przewód z poziomym kolanem przepływa woda. Zmierzona różnica poziomów wody w rurkach piezometrycznych przed i za kolanem wynosiła $h = 20$ mmH$_2$O. Średnica przewodu $d = 30$ mm, strumień objętości przepływu $Q = 1.5$ dm^3/s. Obliczyć wartość współczynnika straty lokalnej kolana.



Dane:
$h = 20$ mmH$_2$O
$d = 30$ mm
$Q = 1.5$ dm^3/s

Wyznaczyć:
ξ

$$Q = v\,\frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = 2.12\,\frac{m}{s}$$

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 + h_{str}$$

$v_1 = v_2 = v$
$h_1 = h_2 = 0$

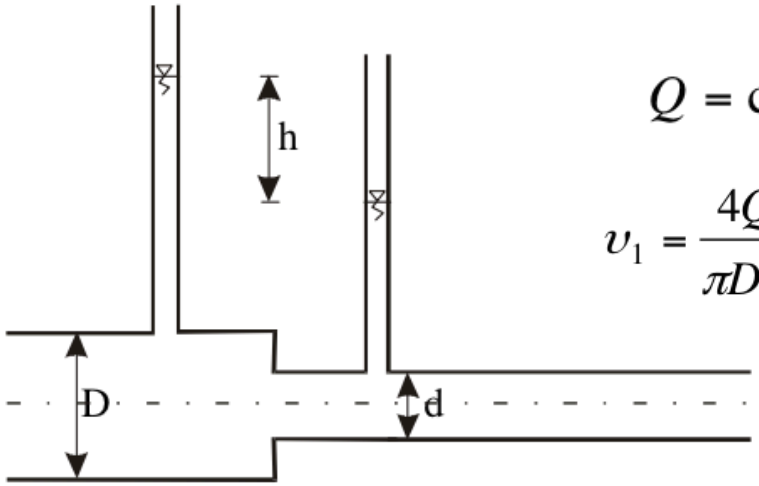
$$h_{str} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{h \cdot \rho \cdot g}{\rho \cdot g} = 0.02\ m$$

$$h_{str} = \xi \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \qquad \xi = \frac{2 \cdot g \cdot h_{str}}{v^2} = \frac{2 \cdot 9.81 \cdot 0.02}{2.12^2} = 0.087$$

Wyznaczyć wartość współczynnika ζ dla nagłego zwężenia przekroju rurociągu przy założeniu, że różnica wskazań piezometrów wynosi h. Odcinek rurociągu potraktować jako krótki.

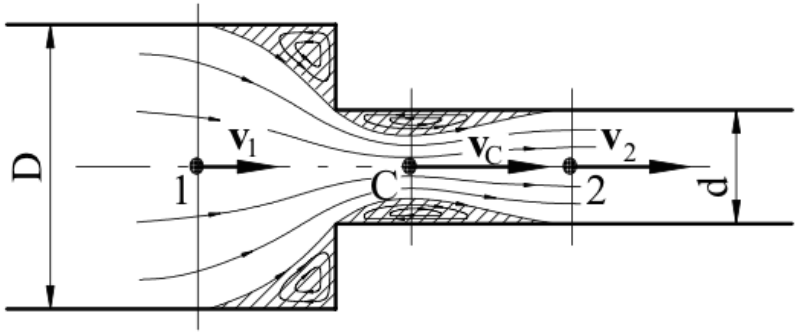
Dane: $d = 0{,}15$ m, $D = 0{,}30$ m, $h = 0{,}5$ m, $Q = 0{,}07$ m^3/s

Szukane: ζ



$$Q = \text{const} = \upsilon_1 \frac{\pi D^2}{4} = \upsilon_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

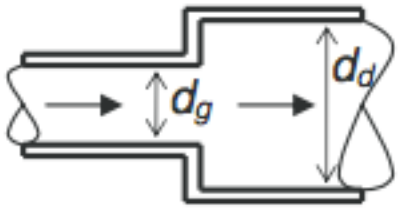
$$\upsilon_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = 1 \text{ m/s}, \quad \upsilon_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = 4 \text{ m/s}$$



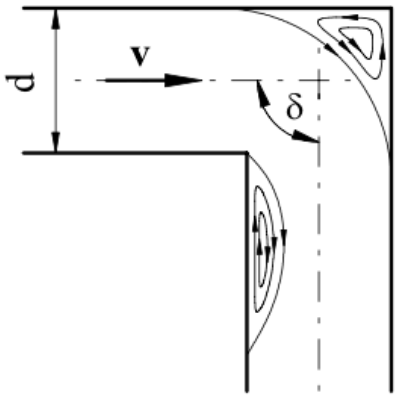
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\upsilon_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\upsilon_2^2}{2g} + \zeta \frac{\upsilon_2^2}{2g}$$

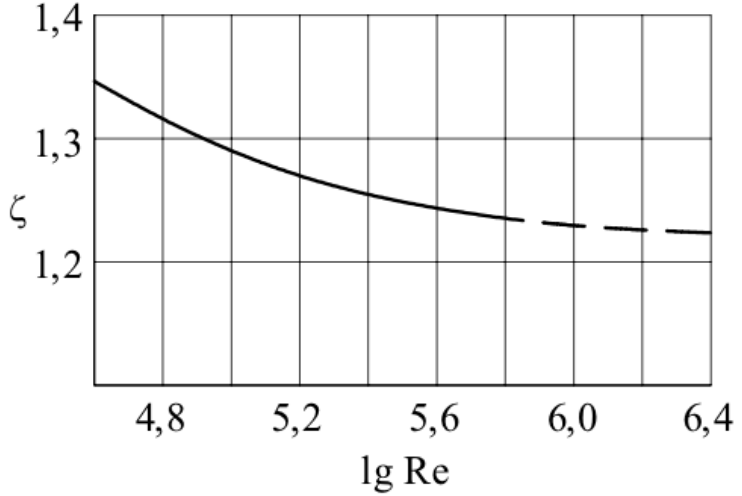
$$\zeta = \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{2g} \right) \frac{2g}{\upsilon_2^2} = \frac{2gh + \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{\upsilon_2^2} = 0{,}938$$

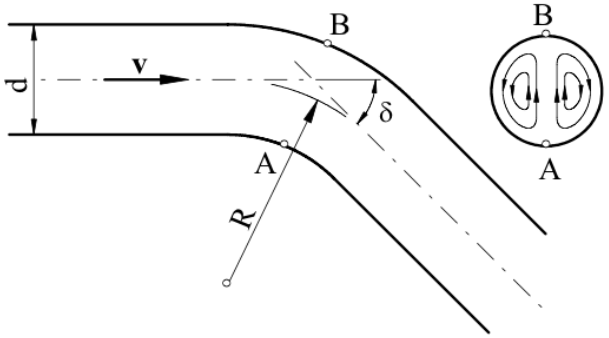
Nagłe zwiększenie przekroju

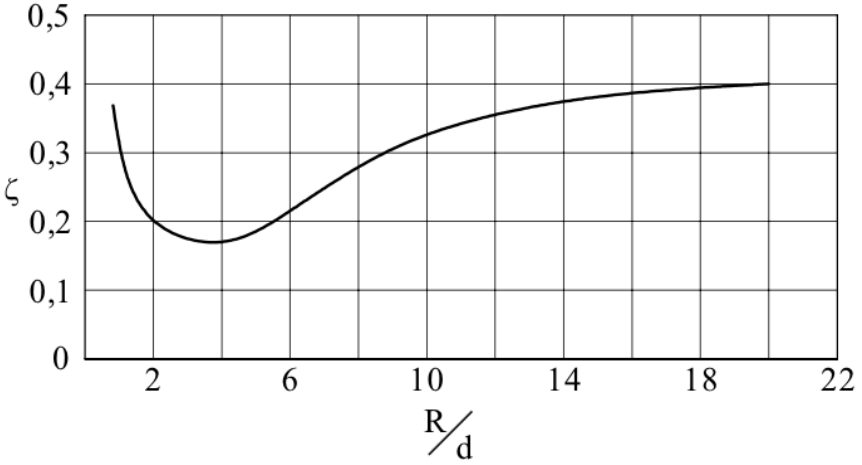


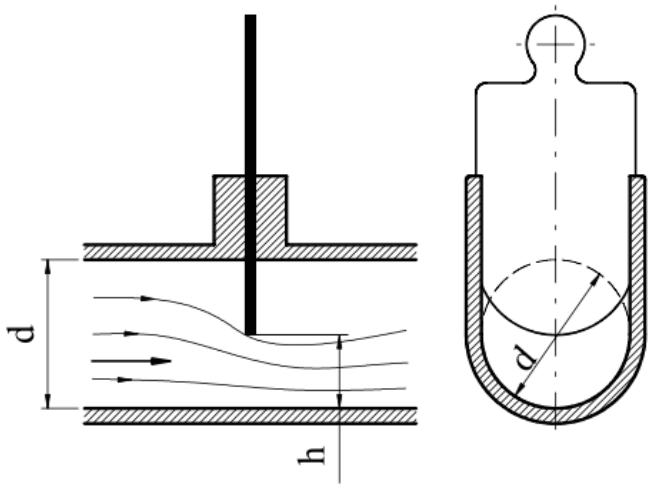
$$\zeta = \left(\frac{A_d}{A_g} - 1 \right)^2$$


d
v
δ


1,4
1,3
1,2
ζ
4,8
5,2
5,6
6,0
6,4
lg Re

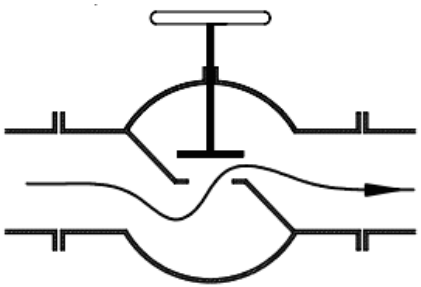

d
v
B
δ
A
R
B
A

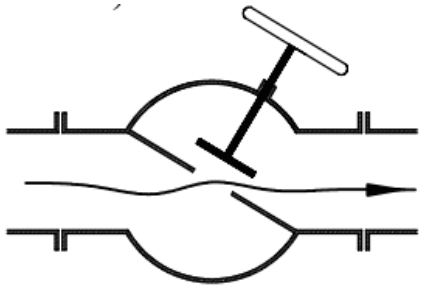

0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
ζ
2
6
10
14
18
22
R/d

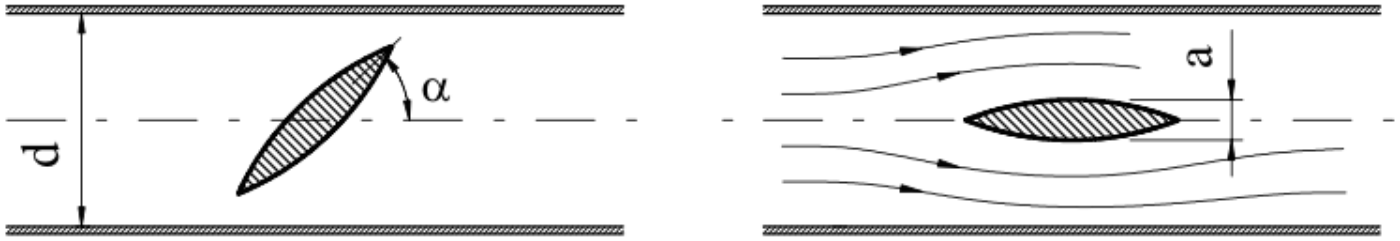


h/d	1	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8
ζ	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

Całkowite otwarcie : $\zeta = 3 \div 5{,}5$ $\zeta = 2 \div 3$



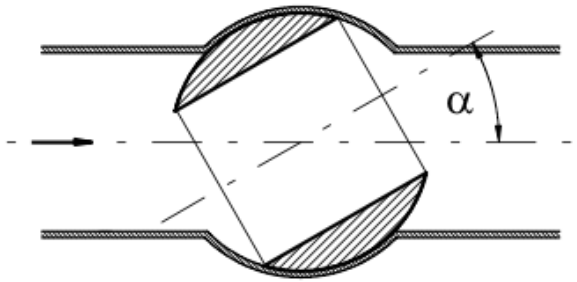




$\alpha°$	ζ	$\alpha°$	ζ	$\alpha°$	ζ
5	0,24	30	3,91	55	58,8
10	0,52	35	6,22	60	118
15	0,90	40	10,8	65	256
20	1,54	45	18,7	70	751
25	2,51	50	32,6	90	∞

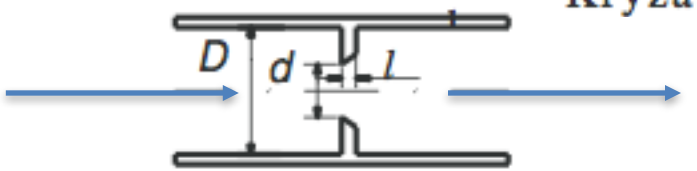
$\alpha^o = 0$

a/d	0,10	0,15	0,20	0,25
ζ	0,05÷0,10	0,10÷0,16	0,17÷0,24	0,25÷0,35

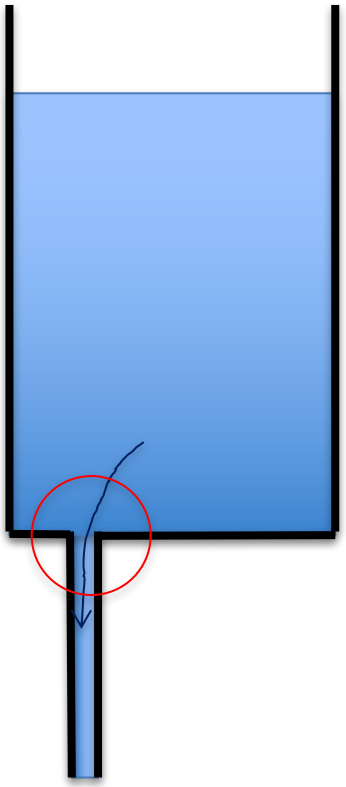


α°	ζ	α°	ζ	α°	ζ
5	0,05	25	3,10	45	31,2
10	0,29	30	5,47	50	52,6
15	0,75	35	9,68	55	106,0
20	1,56	40	17,3		

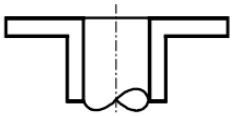
Kryza ostrokrawędziowa cienkościenna



d^2/D^2	0,10	0,15	0,20	0,250	0,30	0,40	0,50	0,60
ζ	226	102	48	31	18	7.8	3.8	1.8

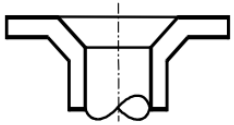


Współczynniki strat przy **wlocie do przewodu**



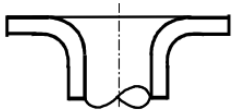
Wlot o ostrych krawędziach

$\zeta = 0{,}5$



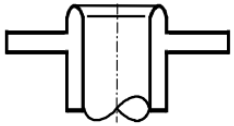
Wlot o ściętych krawędziach

$\zeta = 0{,}25$



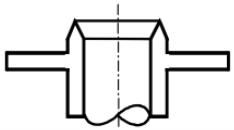
Wlot o dobrze zaokrąglonych krawędziach

$\zeta = 0{,}10 \div 0{,}06$



Wlot do rury wystającej do zbiornika przy zaokrąglonych krawędziach wystającej części

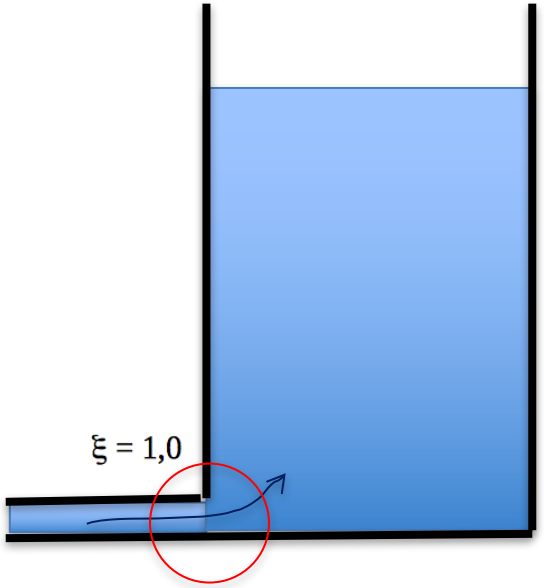
$\zeta = 0{,}56$

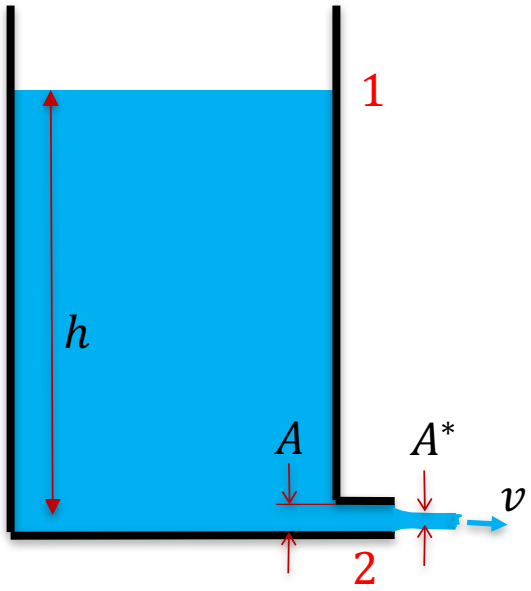


Wlot do rury wystającej do zbiornika przy ostrych krawędziach wystającej części

$\zeta = 1{,}30$

Wlot do zbiornika





$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_{str}$$

$$h_{str} = \xi \frac{v_2^2}{2g} \qquad v_2 = v$$

$$h = \frac{v^2}{2g} + \xi \frac{v^2}{2g} \longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \cdot \sqrt{2gh}$$

$$v = \varphi\sqrt{2gh}$$

$$q = vA^*$$

$$\kappa = \frac{A^*}{A}$$

$$\longrightarrow \quad q = \varphi\kappa A\sqrt{2gh} = \mu A\sqrt{2gh}$$

$$\kappa = \frac{A^*}{A}$$

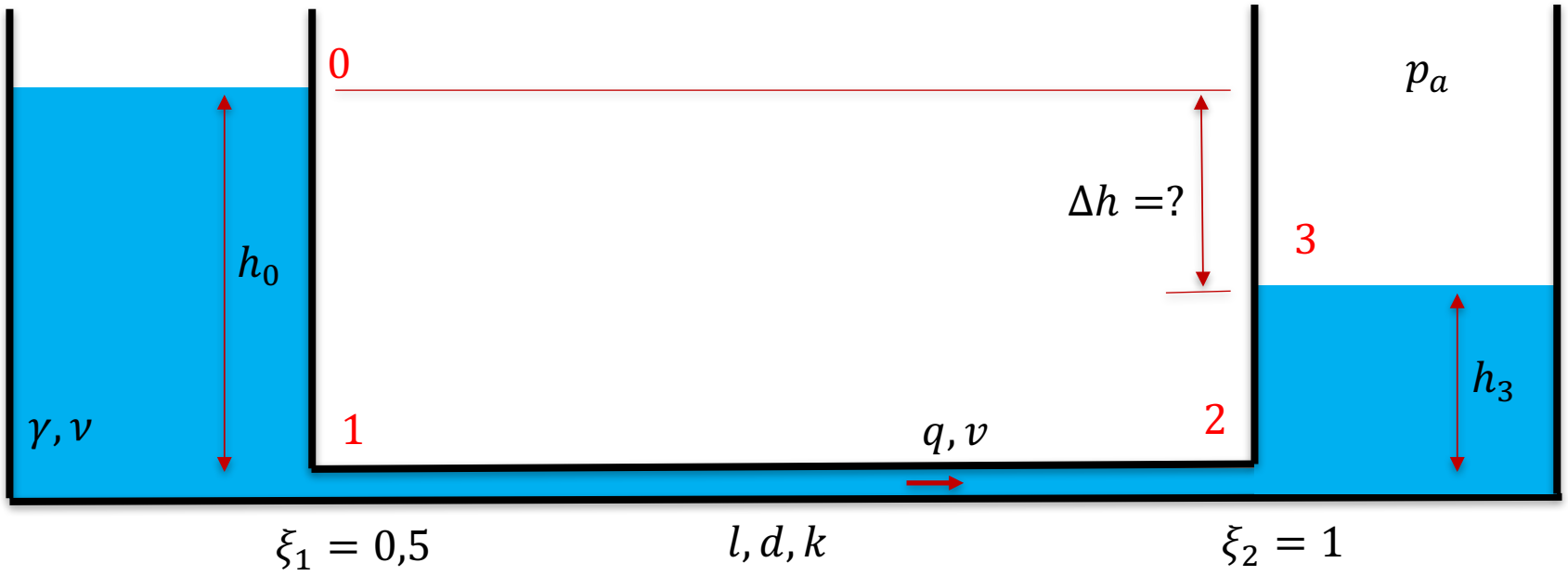
współczynnik przewężenia

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$$

współczynnik prędkości

$$\mu = \varphi\kappa$$

współczynnik wypływu



$h_3 = 5\ m$

$\gamma = 10000 \frac{N}{m^3}$

$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

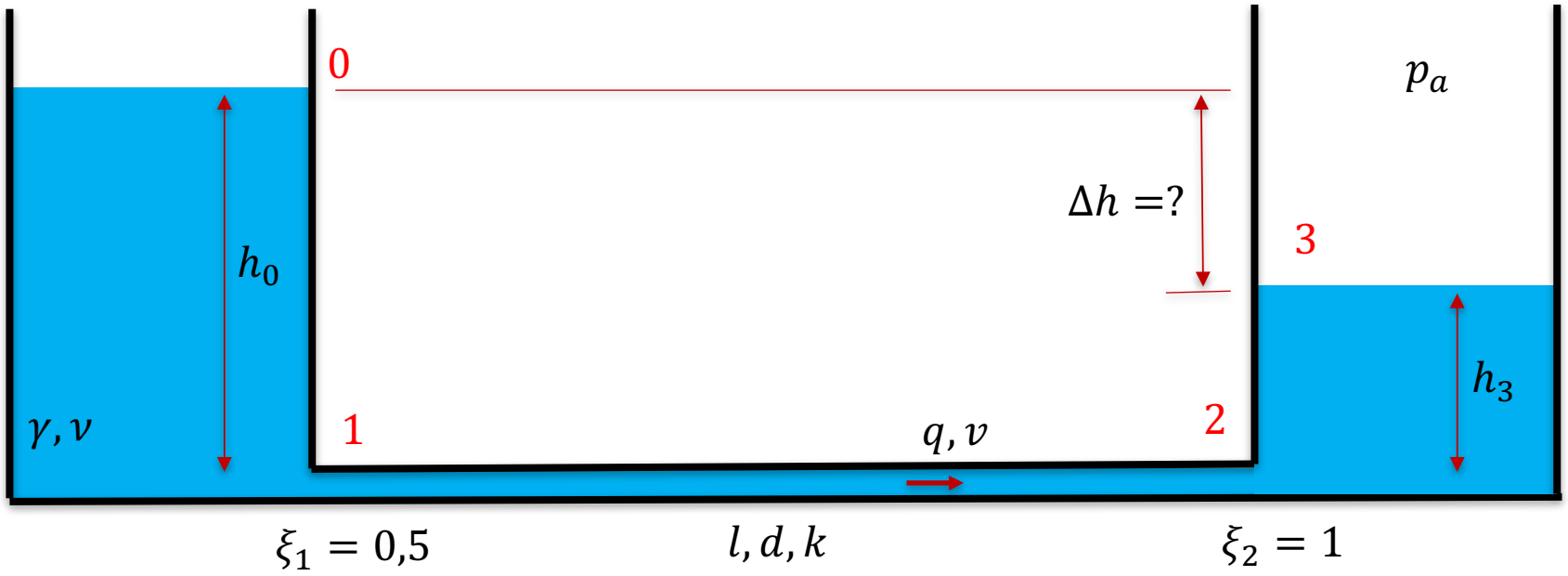
$d = 0{,}04\ m$

$l = 500\ m$

$q = 3 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$

$k = 5 \cdot 10^{-5} m$

(chropowatość)



$h_3 = 5\ m$

$\gamma = 10000 \frac{N}{m^3}$

$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$d = 0{,}04\ m$

$l = 100\ m$

$q = 3 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$

$k = 5 \cdot 10^{-5} m$

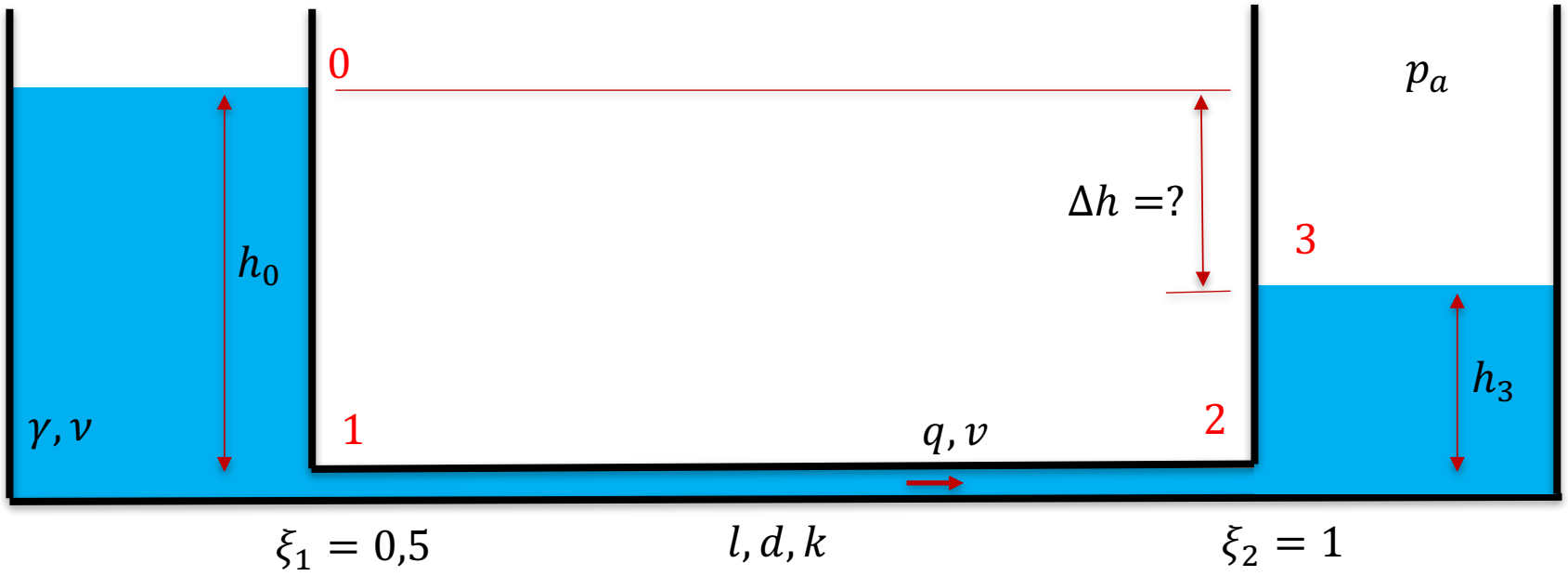
(chropowatość)

$v = \frac{q}{\pi d^2/4} = 2{,}4\ m/s$

$Re = \frac{vd}{\nu} = 9{,}6 \cdot 10^4$

$\frac{k}{d} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$

$\lambda = 0{,}0235$



$h_3 = 5\ m$

$\gamma = 10000 \frac{N}{m^3}$

$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$d = 0{,}04\ m$

$l = 100\ m$

$q = 3 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$

$k = 5 \cdot 10^{-5} m$

(chropowatość)

$$v = \frac{q}{\pi d^2/4} = 2{,}4\ m/s \qquad Re = \frac{vd}{\nu} = 9{,}6 \cdot 10^4 \qquad \frac{k}{d} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$$

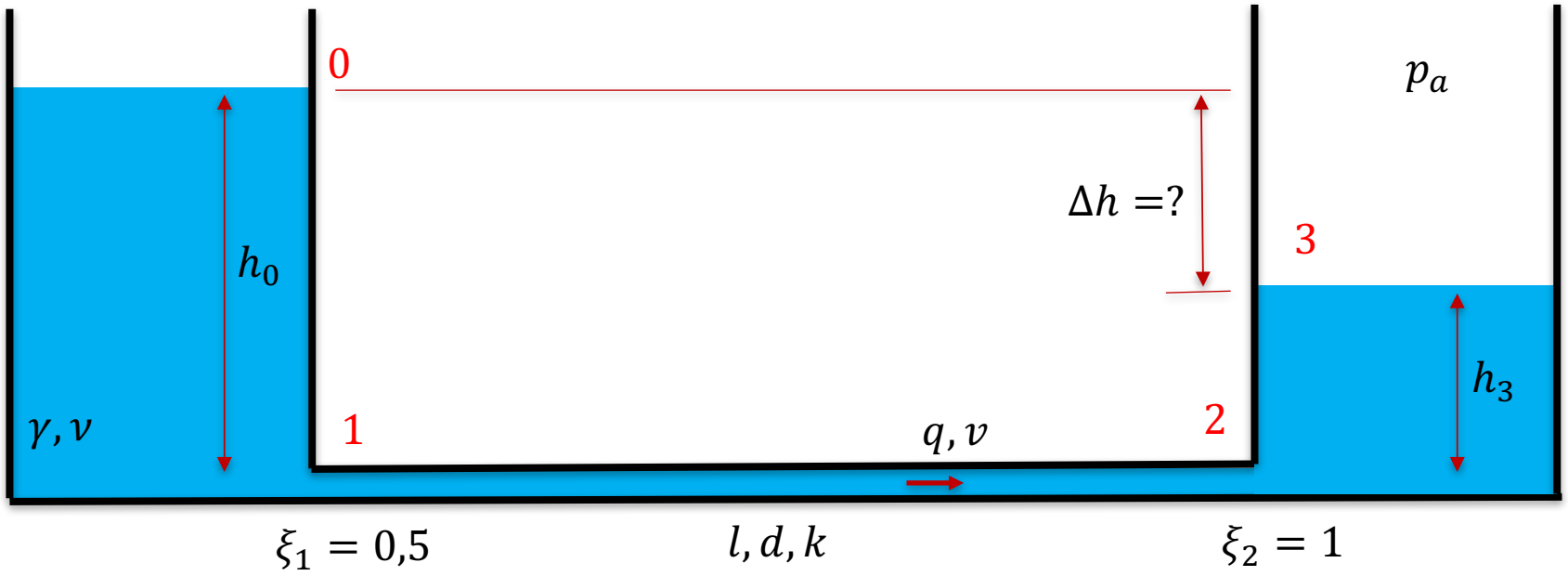
$$\lambda = 0{,}0235$$

(0 – 3):

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h_0 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + h_3 + h_{str.}$$

$$\frac{p_a}{\gamma} + h_0 = \frac{p_a}{\gamma} + h_3 + h_{str.} \longrightarrow \Delta h = h_{str}$$

$$h_{str} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_1 \frac{v^2}{2g} + \xi_2 \frac{v^2}{2g} = 82{,}43\ m$$



$h_3 = 5\ m$

$\gamma = 10000 \frac{N}{m^3}$

$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$d = 0{,}04\ m$

$l = 100\ m$

$q = 3 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$

$k = 5 \cdot 10^{-5} m$

(chropowatość)

$$v = \frac{q}{\pi d^2/4} = 2{,}4\ m/s$$

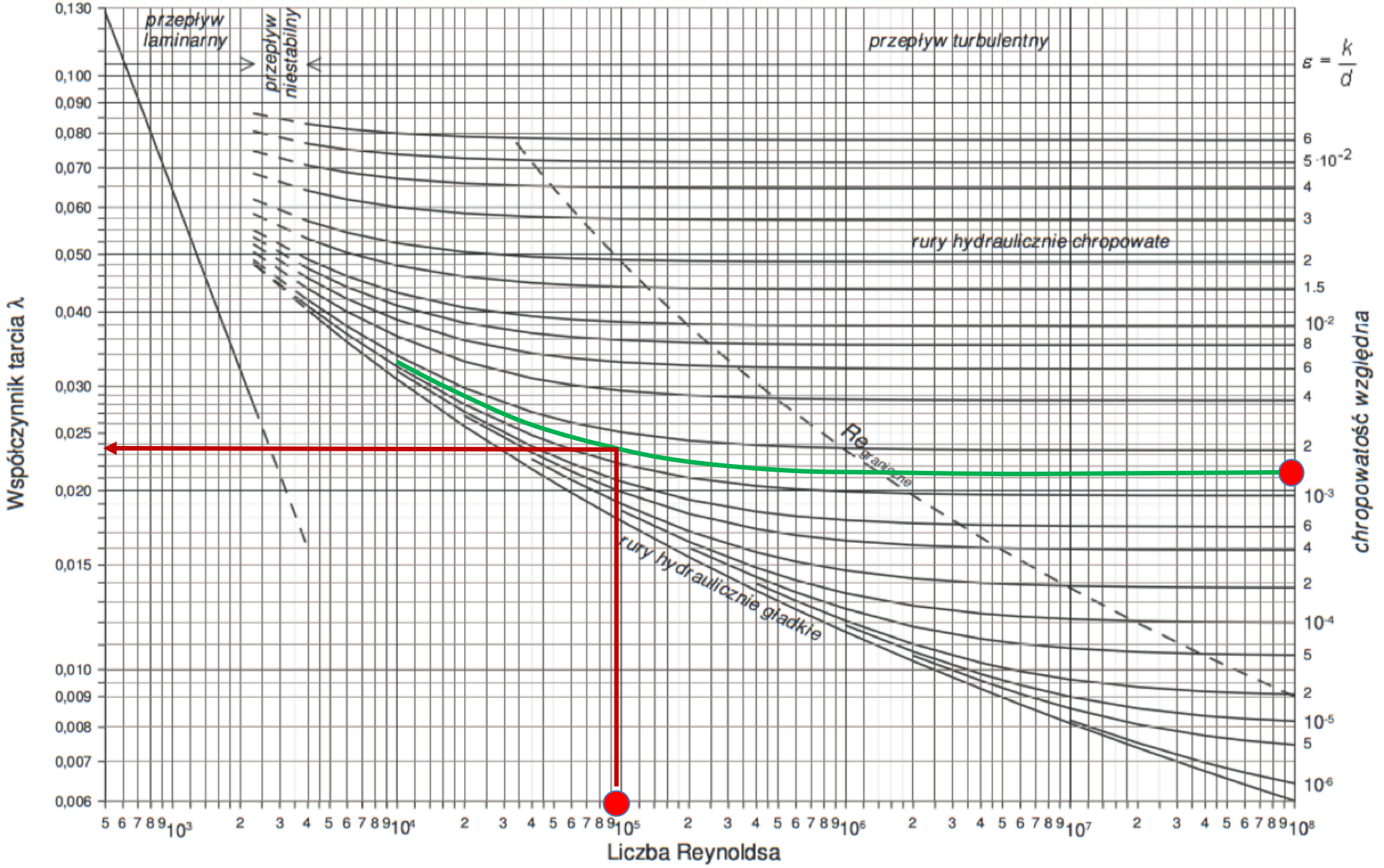
$$Re = \frac{vd}{\nu} = 9{,}6 \cdot 10^4 \qquad \frac{k}{d} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda = 0{,}0235$$

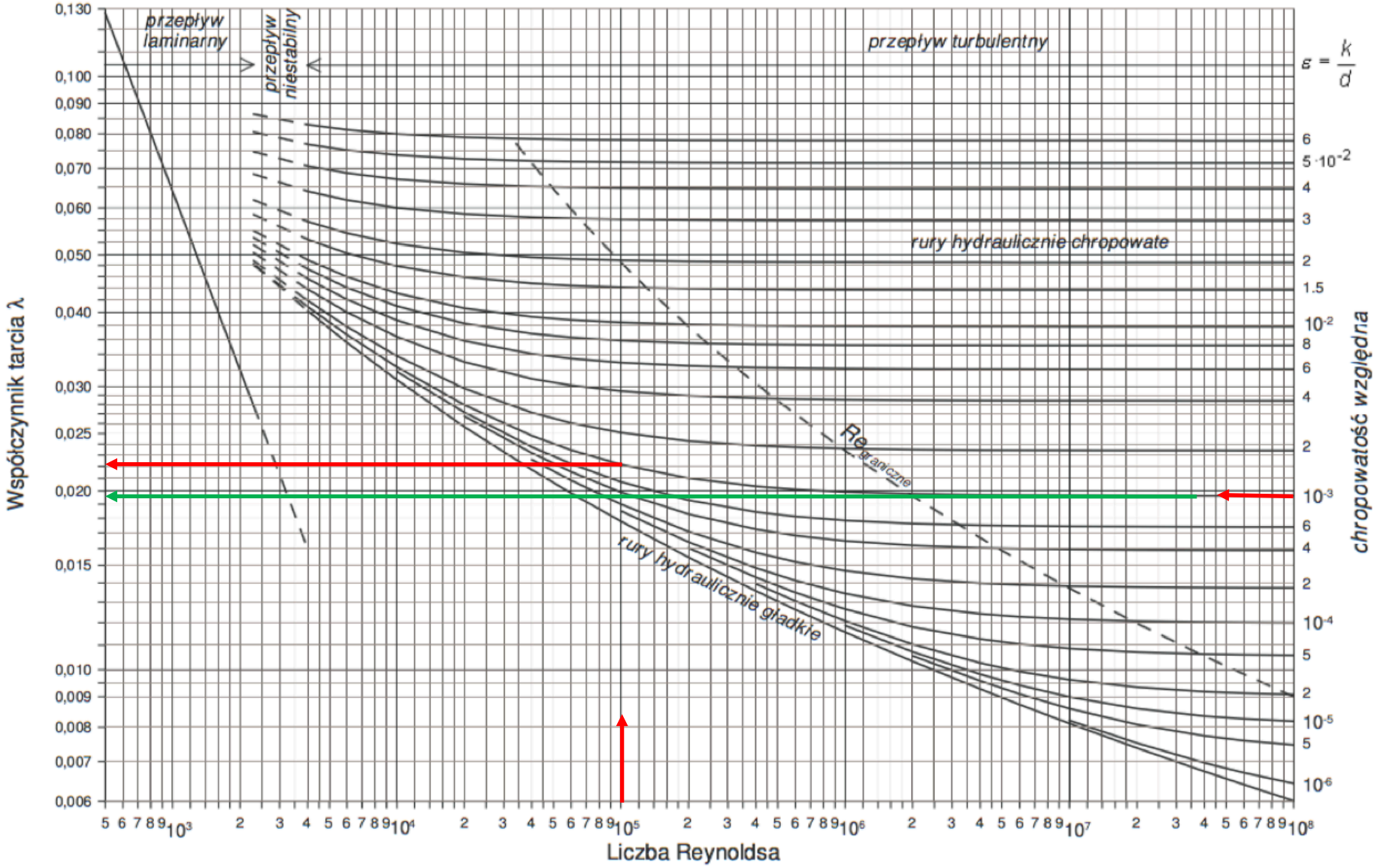
$$h_{str} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_1 \frac{v^2}{2g} + \xi_2 \frac{v^2}{2g} = 17{,}35\ m$$

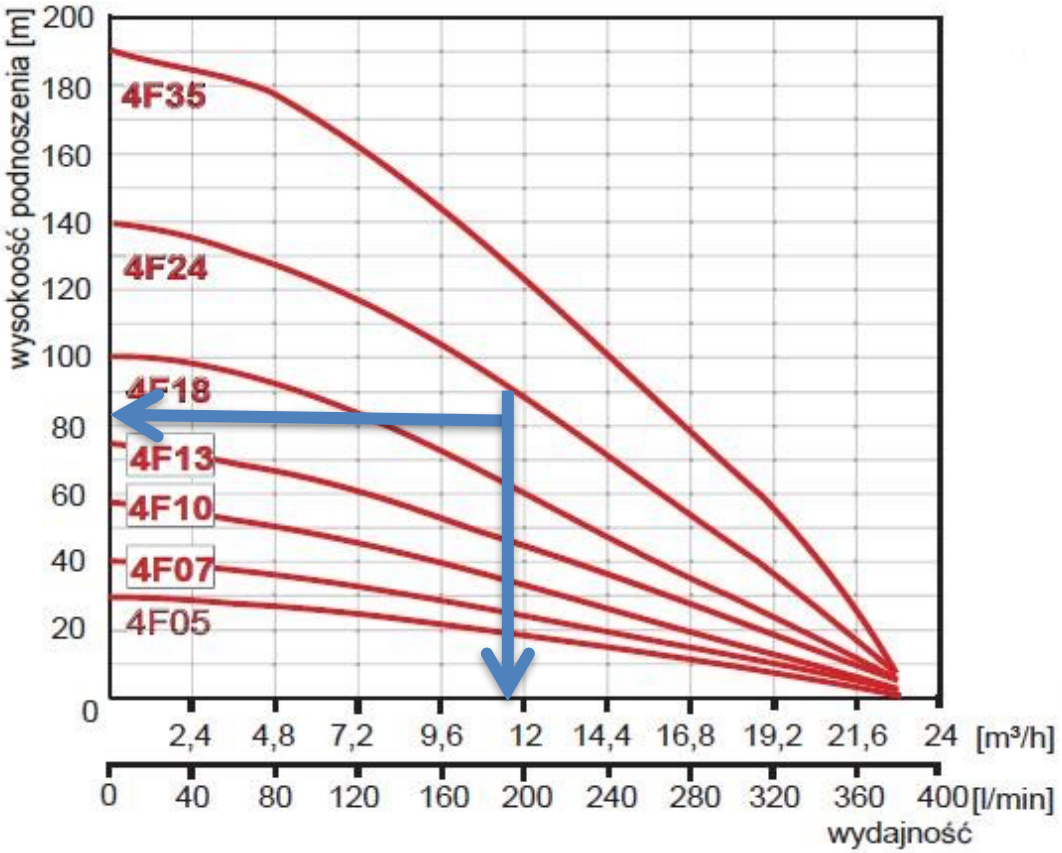
$$h_{str} = 16{,}92 + 0{,}144 + 0{,}288 = 17{,}35\ m$$

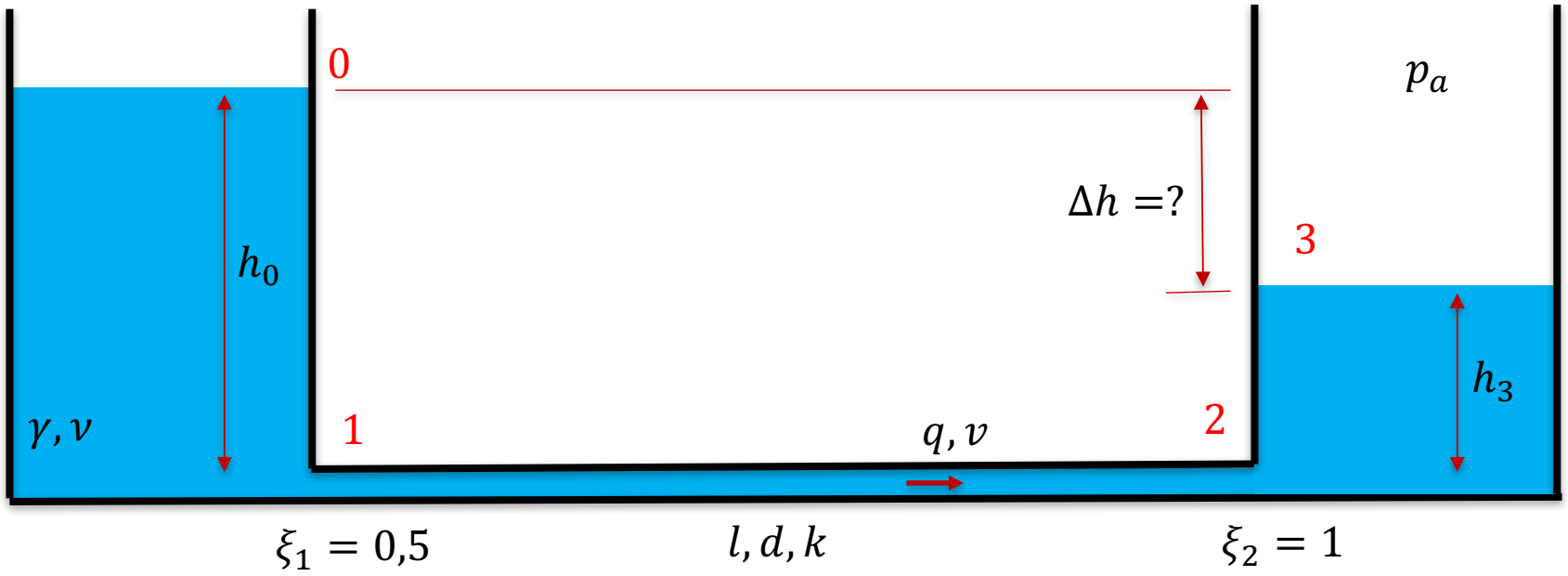
5.2. WYKRES MOODY'EGO (PN-76/M-34034)



5.2. WYKRES MOODY'EGO (PN-76/M-34034)




wysokoość podnoszenia [m]
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
4F35
4F24
4F18
4F13
4F10
4F07
4F05
2,4
4,8
7,2
9,6
12
14,4
16,8
19,2
21,6
24
[m³/h]
0
40
80
120
160
200
240
280
320
360
400
[l/min]
wydajność



$h_3 = 5\ m$

$\gamma = 10000 \frac{N}{m^3}$

$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$d = 0{,}04\ m$

$l = 100\ m$

$q = 3 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$

$k = 5 \cdot 10^{-5} m$

(chropowatość)

$$v = \frac{q}{\pi d^2/4} = 2{,}4\ m/s$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = 9{,}6 \cdot 10^4 \qquad \frac{k}{d} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$$

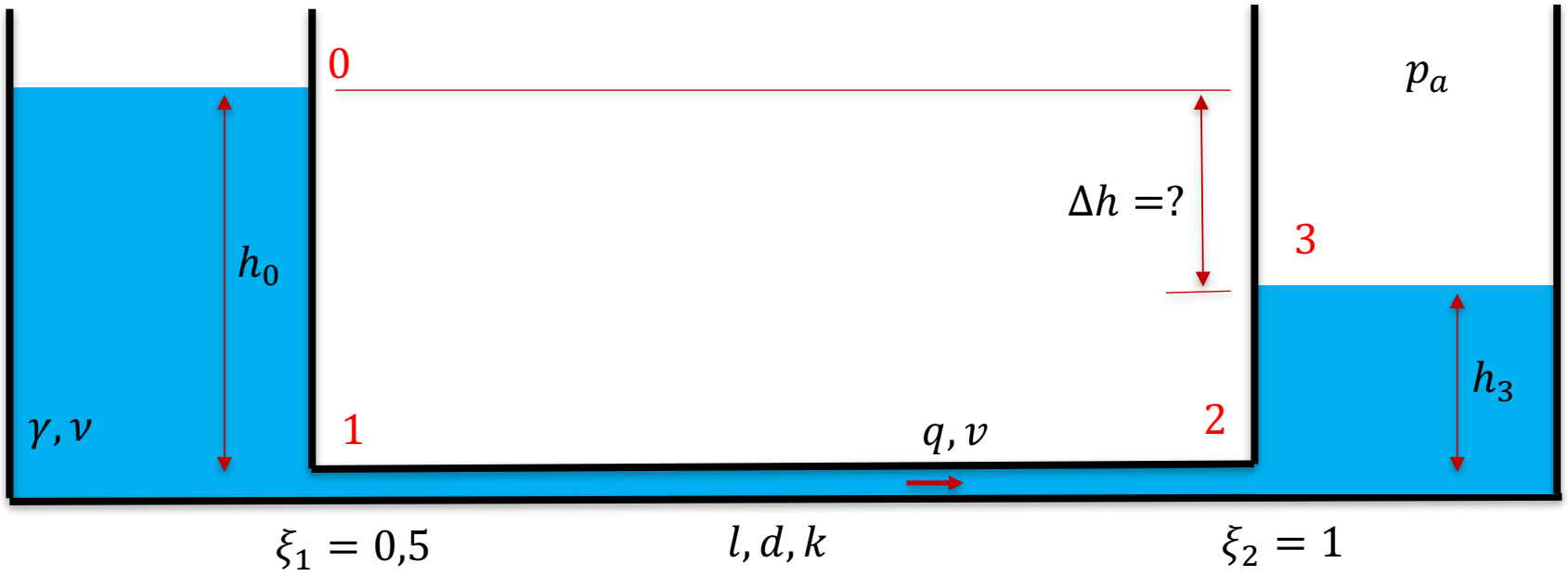
$$\lambda = 0{,}0235$$

(0 − 1):

$$\frac{p_a}{\gamma} + h_0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_{str.}$$

$$h_{str} = \xi_1 \frac{v^2}{2g}$$

$\rightarrow \quad p_1$



$h_3 = 5\ m$

$\gamma = 10000 \frac{N}{m^3}$

$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$d = 0{,}04\ m$

$l = 100\ m$

$q = 3 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$

$k = 5 \cdot 10^{-5} m$

(chropowatość)

$v = \frac{q}{\pi d^2/4} = 2{,}4\ m/s$

$Re = \frac{vd}{\nu} = 9{,}6 \cdot 10^4$

$\frac{k}{d} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$

$\lambda = 0{,}0235$

$p_1 = \ldots$

(1 – 2):

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_{str.}$$

$\rightarrow\ p_2$

$$h_{str} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

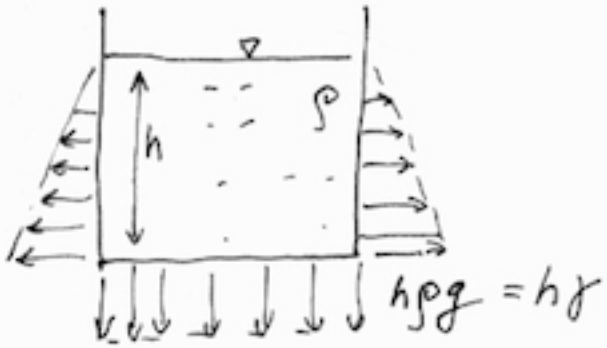
MECHANIKA PŁYNÓW

RÓWNOWAGA WZGLĘDNA

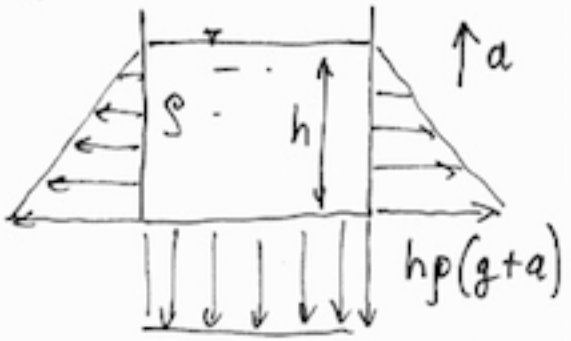
Równowaga względna

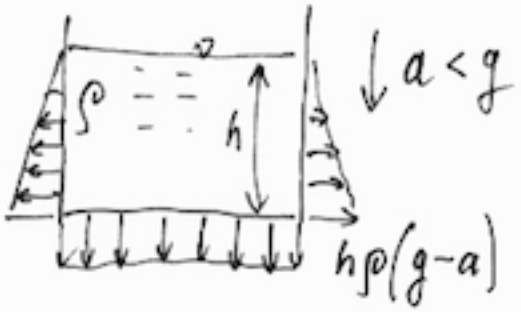
Równowaga względna podczas ruchu postępowego

W zbiorniku będącym w spoczynku lub poruszającym się ruchem jednostajnym (z przyspieszeniem a=0, a więc z prędkością v=const, w szczególności v=0) ciśnienie hydrostatyczne określone jest wzorem $p = h\gamma = (h\rho)g$ i jest proporcjonalne do przyspieszenia ziemskiego g, a powierzchnia swobodna cieczy jest prostopadła do wektora $\bar{g}$.

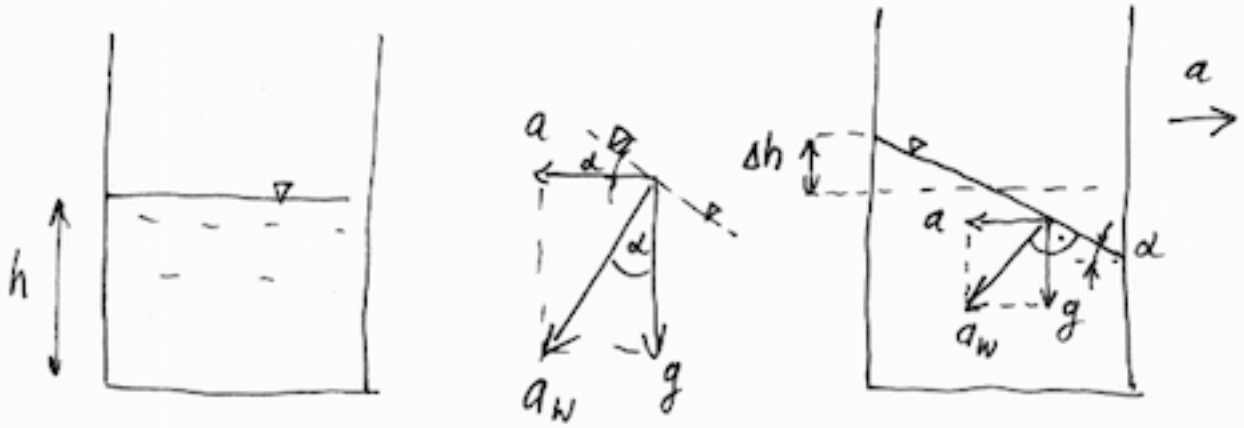


W zbiorniku poruszającym się pionowo z przyspieszeniem *a* ciecz staje się „bardziej ciężka" odpowiednio do wartości przyspieszenia wypadkowego $a_w = g \pm a$.



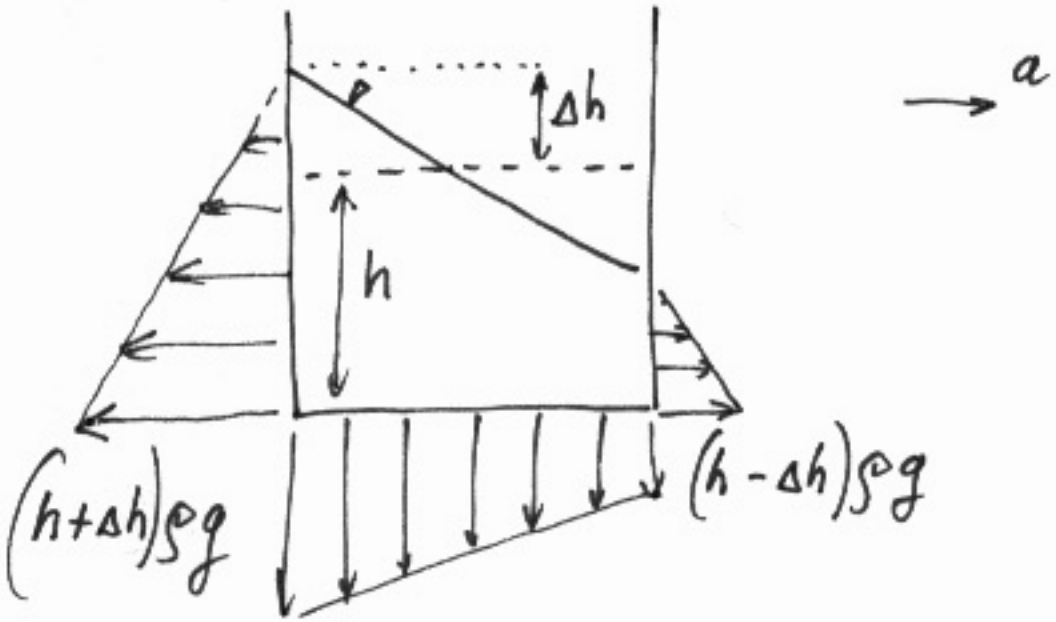


W zbiorniku poruszającym się poziomo z przyspieszeniem *a*, wektor wypadkowy $\bar{a}_w$ zorientowany jest pod kątem α względem pionu $\left(tg\alpha = \frac{a}{g}\right)$, a powierzchnia swobodna (prostopadła do wektora $\bar{a}_w$) cieczy nachylona jest po kątem α do poziomu



$$tg\alpha = \frac{a}{g};\quad tg\alpha = \frac{\Delta h}{\frac{l}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2g} = \frac{2\Delta h}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta h = \frac{al}{2g}$$

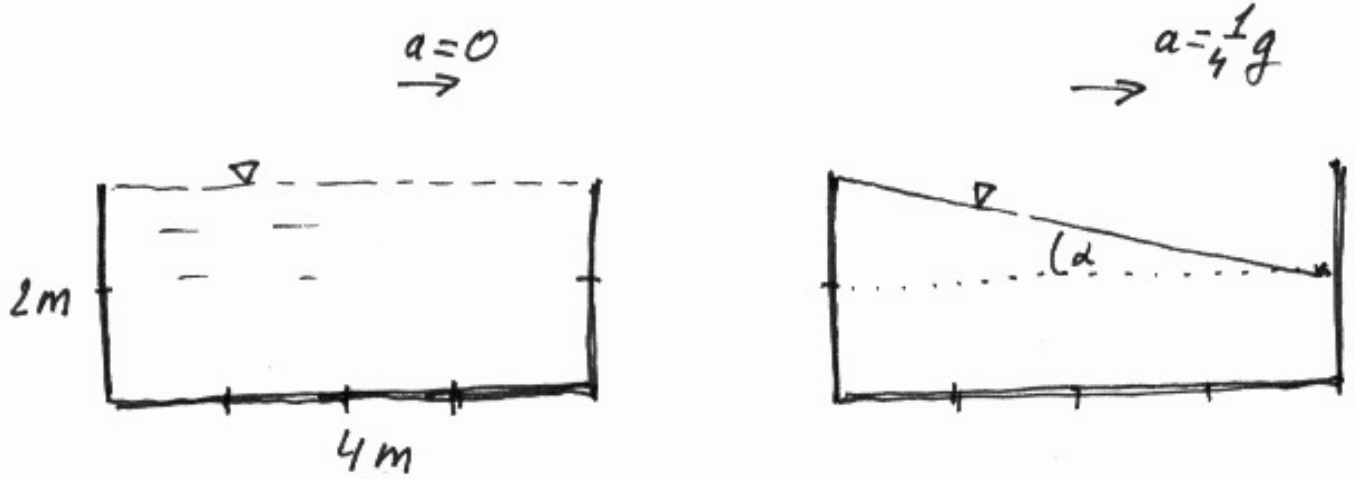
Ciśnienie hydrostatyczne, jego rozkład na ścianach zbiornika (a w konsekwencji siły naporu) zależą od nowego położenia zwierciadła cieczy w zbiorniku.



W zbiorniku zmieniła się wysokość (pionowa) słupa cieczy w różnych miejscach zbiornika. Obliczając ciśnienie hydrostatyczne trzeba uwzględnić zmianę wysokości słupa cieczy.

Zadanie

Otwarty zbiornik prostopadłościenny o wymiarach jak na rysunku, całkowicie wypełniony cieczą, porusza się poziomo z przyspieszeniem $a = \frac{1}{4}g$. Obliczyć, ile cieczy wyleje się ze zbiornika. Znaleźć wartości ciśnienia hydrostatycznego w p. A i B zbiornika.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{4}g}{g} = \frac{1}{4}$$

Ze zbiornika wylało się (podczas ruchu poziomego, przyspieszonego) $\frac{1}{4}$ całkowitej objętości.

$p_A = 2\rho g$, $\quad p_B = 1 \cdot \rho \cdot g$

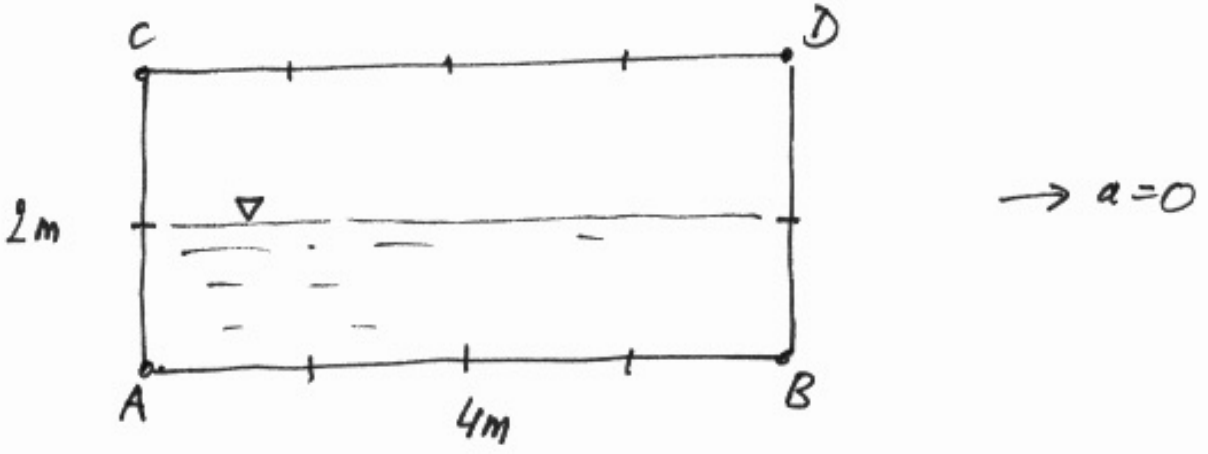
Zadanie

Zamknięty zbiornik prostopadłościenny, o wymiarach jak na rysunku, napełniono do połowy cieczą o gęstości ρ. Zbiornik porusza się poziomo z przyspieszeniem $a = g$. Wyznaczyć rozkład ciśnienia działającego na ściany zbiornika.

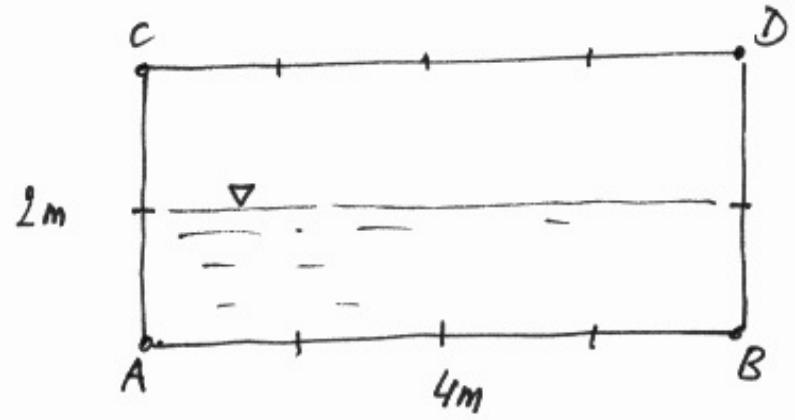
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{g}{g} = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$

W zbiorniku podczas rozważanego ruchu objętość cieczy jest taka sama jak w zbiorniku w spoczynku.

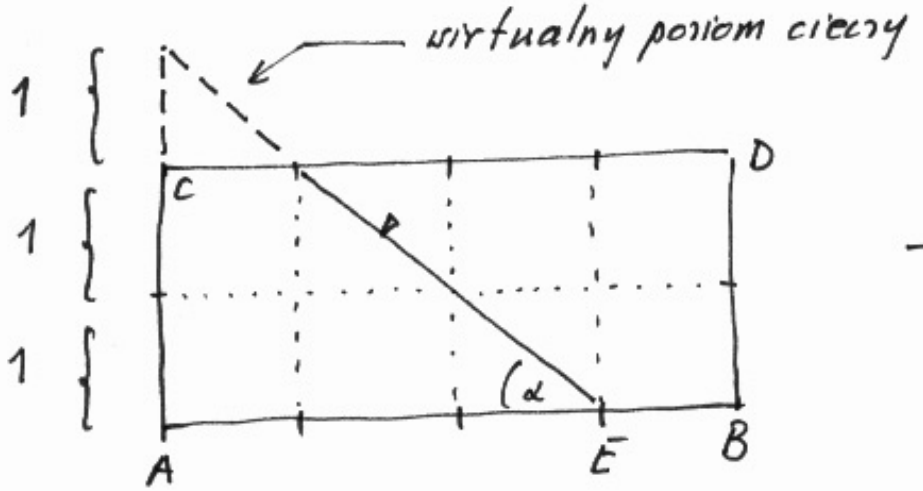
$p_A = 3 \cdot \rho g \qquad p_B = 0 \qquad p_C = 1 \cdot \rho g \qquad p_E = 0$



$p_A = 3 \cdot \rho g$ $p_B = 0$ $p_C = 1 \cdot \rho g$ $p_E = 0$



$\rightarrow a = 0$

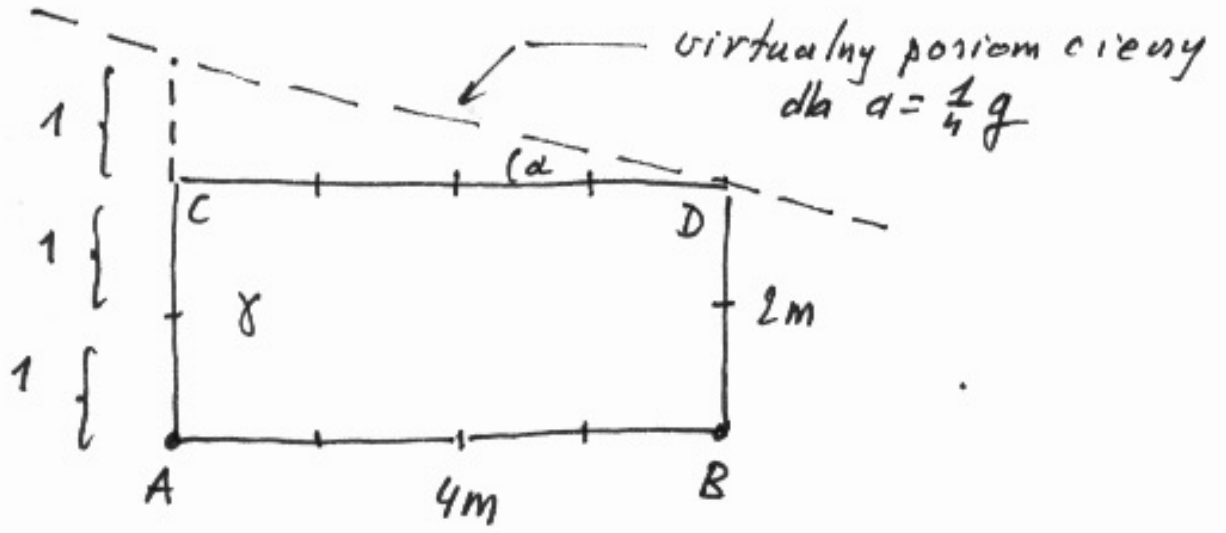


$\rightarrow a = g$

Zadanie

Zbiornik zamknięty całkowicie napełniony, $a = \frac{1}{4}g$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{4}g}{g} = \frac{1}{4}$$



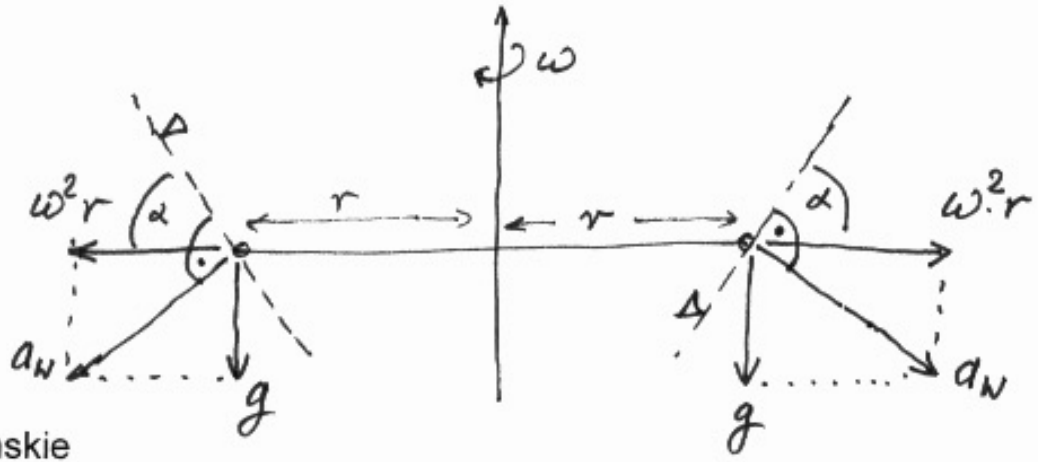
$p_C = 1 \cdot \gamma$

$p_D = 0$

$p_A = 3 \cdot \gamma$

$p_B = 2\gamma$

Równowaga względna cieczy podczas ruchu obrotowego.



g – przyspieszenie ziemskie

$a_d = \omega^2 r$ – przyspieszenie dośrodkowe

W odległości r od osi obrotu powierzchnia cieczy jest nachylona pod kątem α do osi poziomej (powierzchnia cieczy jest prostopadła do wektora $\bar{a}_w$)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_d}{g} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Jak widać, przy ω = const, kąt α (tg α) jest funkcją liniową promienia r.
Jeżeli $y(r)$ jest funkcją określającą powierzchnię cieczy to korzystając z interpretacji geometrycznej pochodnej funkcji możemy napisać

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} y(r) \quad \rightarrow \quad \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} y(r)$$

$$\frac{\omega^2 r}{g} \mathrm{d}r = \mathrm{d}y(r)$$

$$\frac{\omega^2 r}{g}\mathrm{d}r = \mathrm{d}y(r)$$

Całkując obydwie strony powyższego równania otrzymuje się

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} + c = y(r)$$

a więc podczas ruchu obrotowego powierzchnia swobodna cieczy jest paraboloidą obrotową (przekrój osiowy daje parabolę o równaniu przedstawionym powyżej.

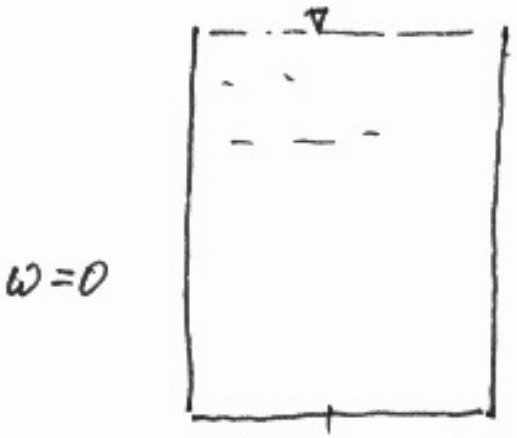
Przykład

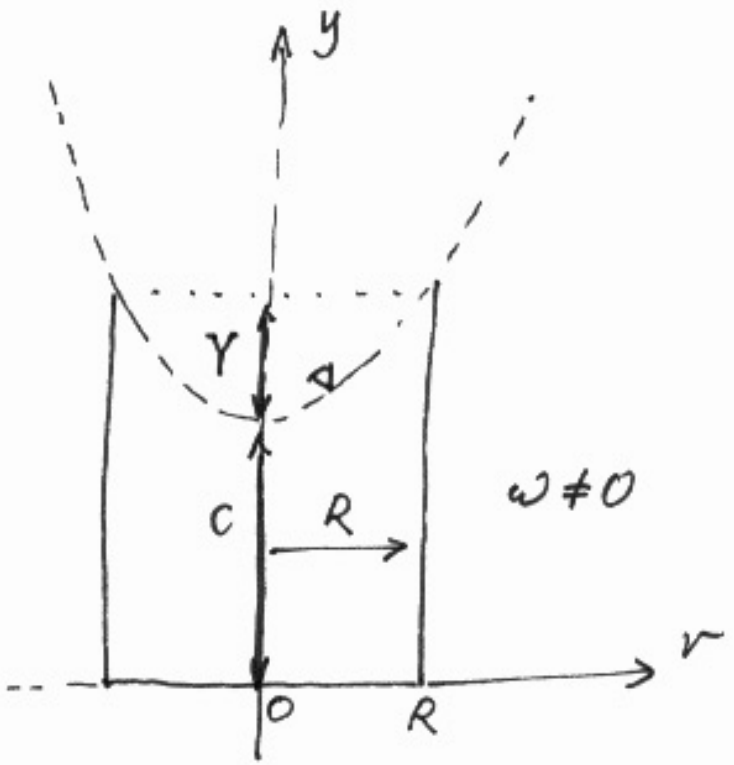
Otwarty zbiornik w kształcie walca o wysokości h i promieniu podstawy R jest początkowo całkowicie wypełniony. Obliczyć, ile cieczy wyleje się ze zbiornika. Jaki będzie kształt powierzchni swobodnej cieczy?

$$y(r) = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) r^2 + c$$

$$Y = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) R^2$$

$$c = h - y$$





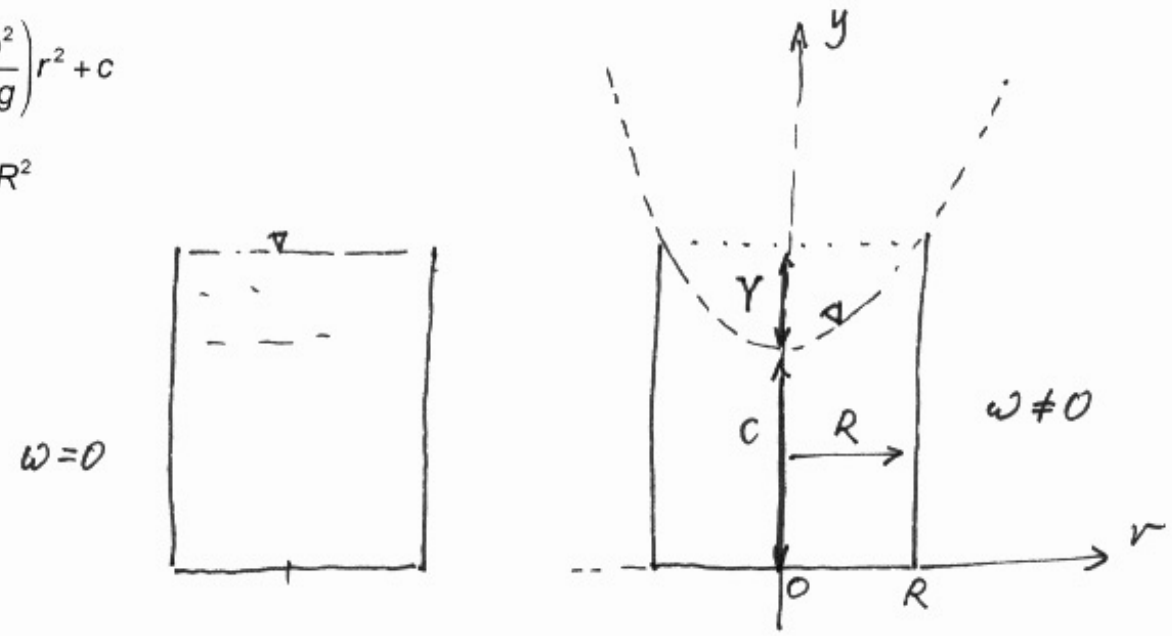
Objętość V_p paraboloidy obrotowej: $V_p = V_{p1} = \frac{1}{2}\pi R^2 Y$

Objętość walca: $V_w = \pi R^2 Y = 2V_p = 2V_{p1}$

$$y(r) = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) r^2 + c$$

$$Y = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) R^2$$

$$c = h - y$$



Objętość V_p paraboloidy obrotowej: $V_p = V_{p1} = \frac{1}{2}\pi R^2 Y$

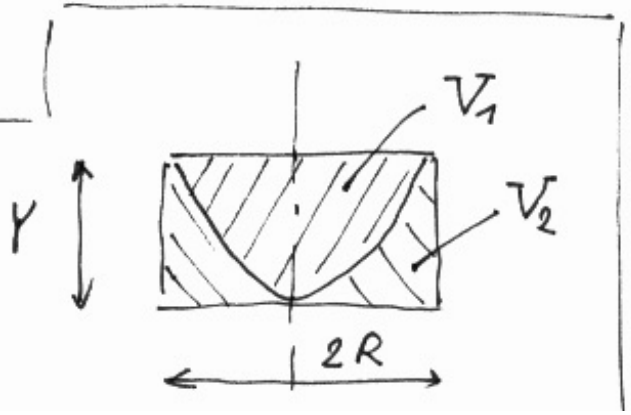
Objętość walca: $V_w = \pi R^2 Y = 2V_p = 2V_{p1}$

Ze zbiornika wyleje się $\frac{1}{2}\pi R^2 Y = \frac{1}{2}\pi R^2 \frac{\omega^2}{2g} R^2 = \frac{\omega^2 R^4 \pi}{4g} \left[\mathrm{m}^3\right]$ cieczy.

$p_a = h\rho g, \qquad p_b = (h - Y)\rho g$

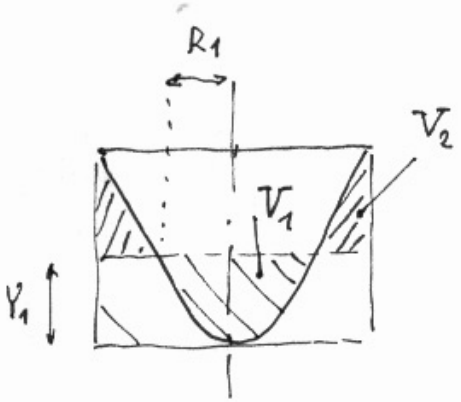
Dla paraboloidy obrotowej:

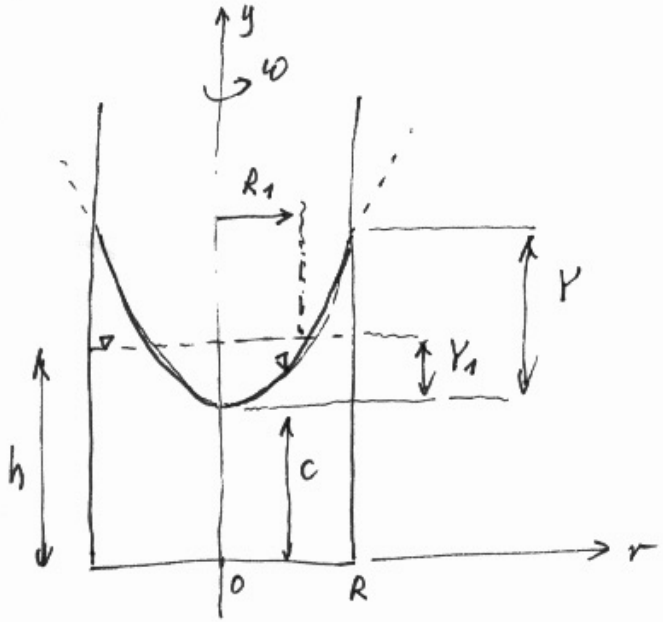
$V_1 = V_2$



Przykład

Zbiornik otwarty, częściowo napełniony, o wysokości na tyle dużej, że nie nastąpi wylewanie się cieczy. Dane są R, h, ρ, ω.





$$y(r)=\left(\frac{\omega^2}{2g}\right)r^2+c$$

$$Y=\left(\frac{\omega^2}{2g}\right)R,\quad Y_1=\left(\frac{\omega^2}{2g}\right)R_1$$

h - początkowa wysokość słupa cieczy

$$V_1=V_2.$$

$$V_1=\frac{1}{2}\pi R_1^2 Y_1$$

$$V_2=\pi R^2\left(Y-Y_1\right)-\left[\frac{1}{2}\pi R^2 Y-\frac{1}{2}\pi R_1^2 Y_1\right]$$

Z warunku $V_1=V_2$ mamy

$$\frac{1}{2}\pi R_1^2 Y=\pi R^2 Y-\pi R^2 Y_1-\frac{1}{2}\pi R^2 Y+\frac{1}{2}\pi R_1^2 Y_1$$

a po uproszczeniu

$$Y_1=\frac{1}{2}Y$$

zatem

$$c=h-\frac{Y}{2}\ \text{oraz}\ P_A=\left(h+\frac{Y}{2}\right)\rho g,\quad P_0=\left(h-\frac{Y}{2}\right)\rho g$$

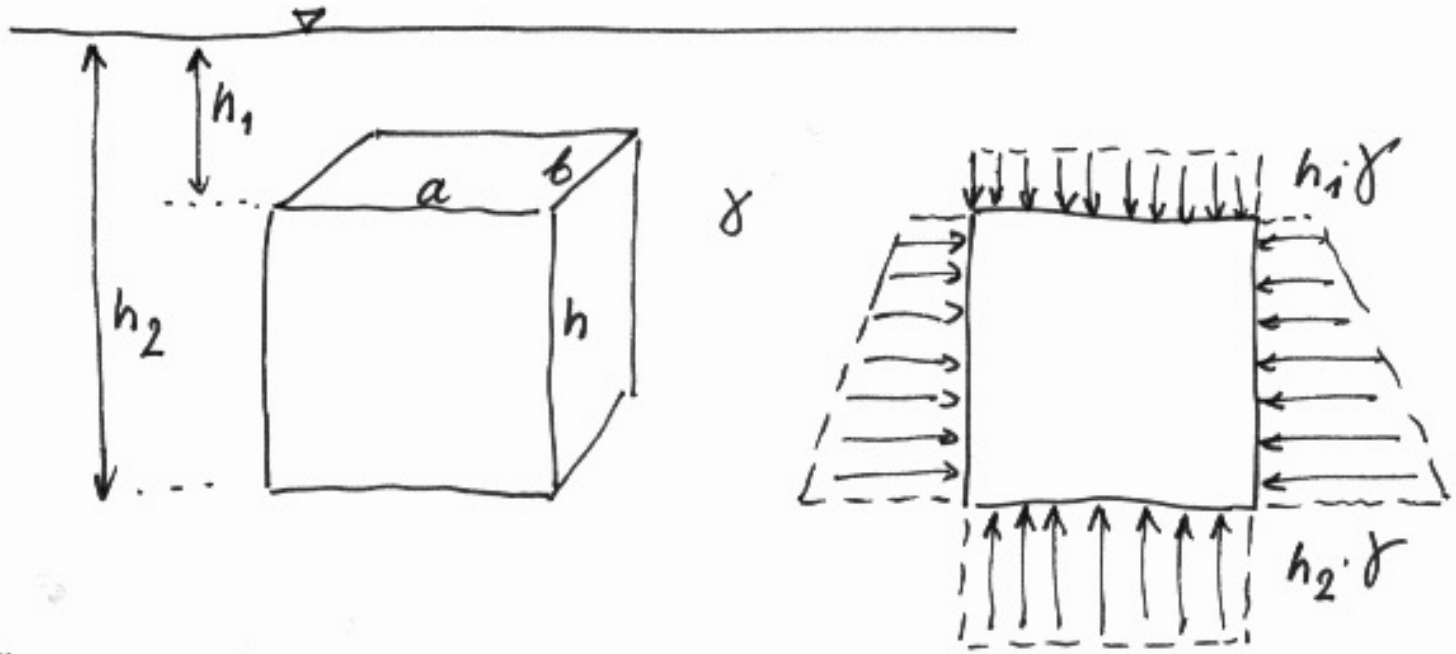
MECHANIKA PŁYNÓW

PŁYWANIE CIAŁ

Pływanie ciał

Prawo Archimedesa

Na ciało zanurzone (częściowo lub całkowicie) w płynie działa siła wyporu W, skierowana pionowo do góry, równa ciężarowi płynu o objętości równej objętości zanurzonej części. Punkt przyłożenia siły wyporu (środek wyporu) znajduje się w środku geometrycznym części zanurzonej.



Siły naporu działające na ściany boczne równoważą się. Różnica sił naporu działających na dolne i górne dno jest siłą wyporu

$$W = h_2\gamma ab - h_1\gamma ab = \gamma ab\left(h_2 - h_1\right) = \gamma abh = \gamma V ,$$

gdzie γ - ciężar właściwy płynu

V – objętość zanurzonego ciała

Balon

G – łączny ciężar kosza z ładunkiem, powłoki balonu i gazu wypełniającego powłokę.

$W = V_B\gamma_p$, V_B - objętość balonu, γ_p - ciężar właściwy powietrza.

Aby zachodziło $W \geq G$ (warunek unoszenia się balonu) objętość balonu musi być odpowiednio duża, a ciężar właściwy γ gazu wewnątrz powłoki musi być znacznie mniejszy od γ_p.

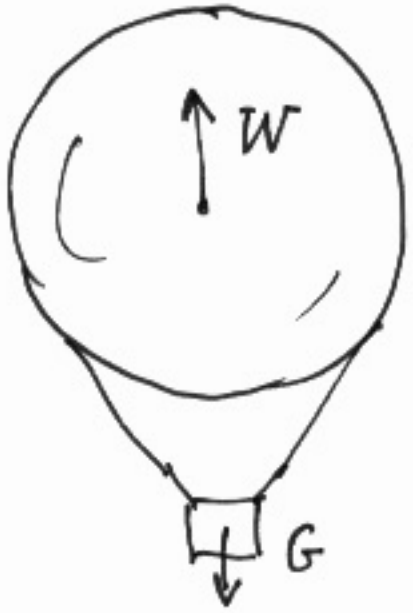
$$V_B\gamma_p \geq V_B\gamma + G_1 = G$$

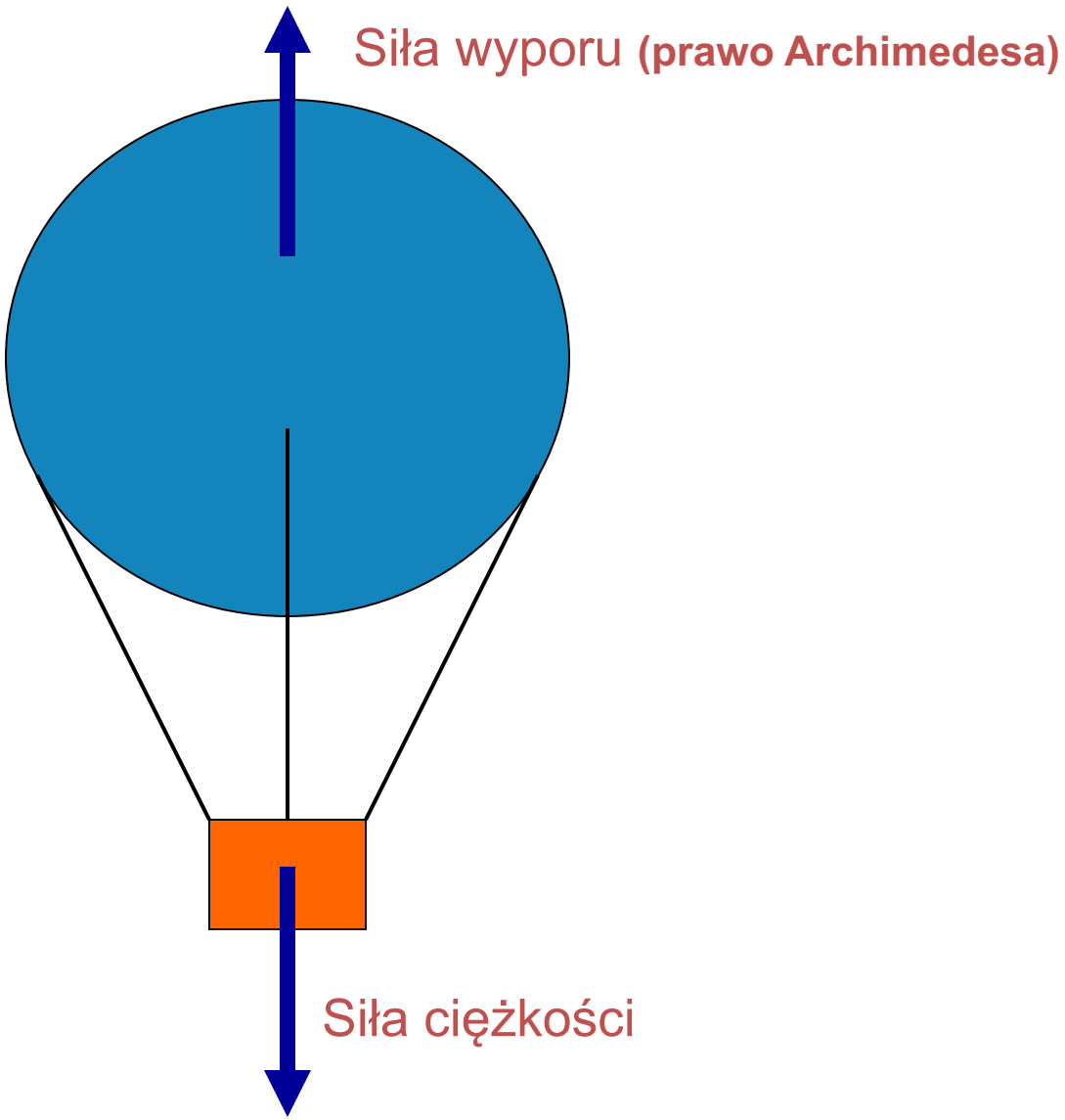
$$V_B\left(\gamma_p - \gamma\right) \geq G_1$$

$$V_B \geq \frac{G_1}{\gamma_p - \gamma}$$

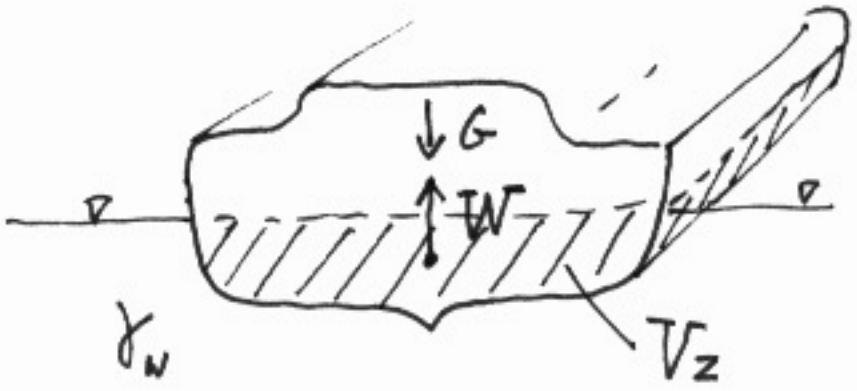
G_1 - łączny ciężar kosza z ładunkiem i powłoki balonu

$V_B\gamma$ - ciężar gazu wypełniającego powłokę balonu




Siła wyporu (prawo Archimedesa)
Siła ciężkości

Statek



Warunek pływania statku

$G = W = V_z \gamma_w$

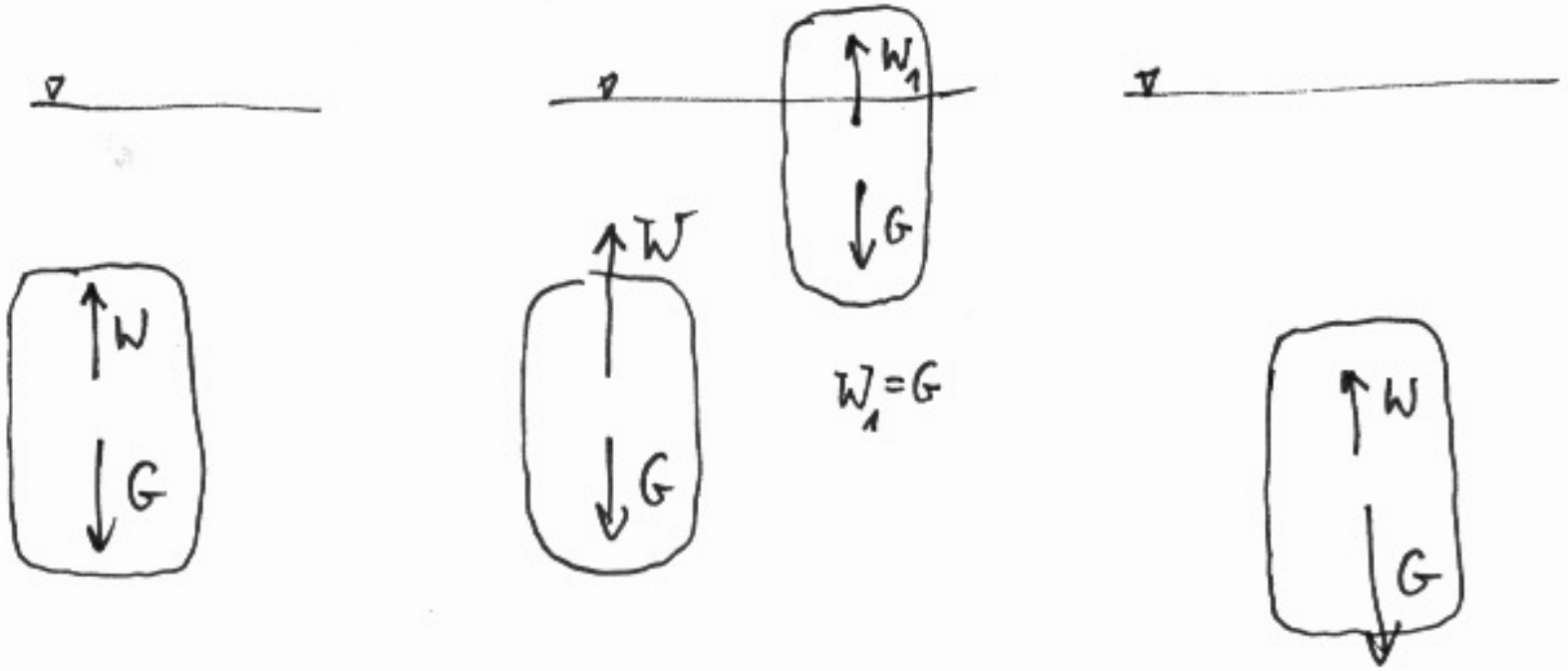
V_z - objętość zanurzonej części statku

γ_w - ciężar właściwy wody

Wzrost ciężaru statku (załadunek) musi powodować wzrost zanurzenia (wzrost objętości części zanurzonej).

Trzy przypadki

Ciało o ciężarze właściwym γ_C i objętości V_C całkowicie zanurzone w wodzie o ciężarze właściwym γ_W



$W = V_C \gamma_W$

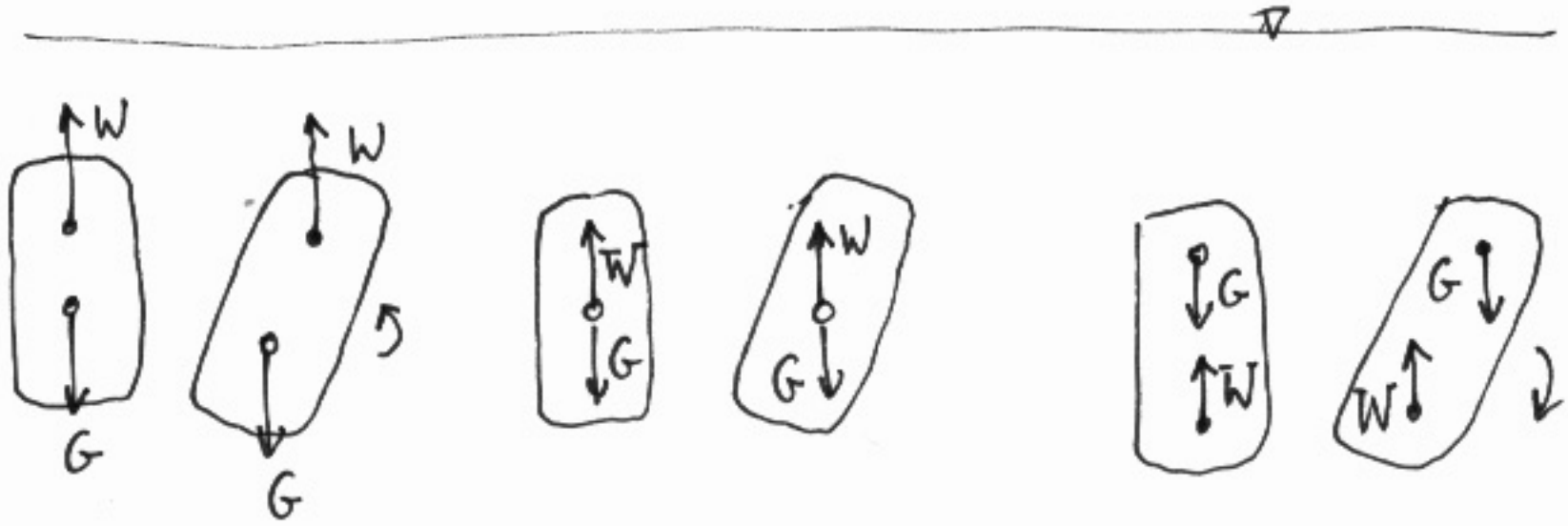
$G = V_C \gamma_C$

$W = G \rightarrow \gamma_C = \gamma_W$
(równowaga; ciało pozostaje na głębokości, na której zostało umieszczone)

$W > G \rightarrow \gamma_W > \gamma_C$
(ciało wynurza się do stanu częściowo wynurzonego, w którym spełniony będzie warunek pływania)

$W < G \rightarrow \gamma_W < \gamma_C$
(ciało tonie)

Stateczność (wychyleniowa) **ciała całkowicie zanurzonego** ($W = G$)



środek wyporu nad środkiem ciężkości – równowaga trwała (po wychyleniu moment pary sił $W - G$ przywraca pierwotne położenie)

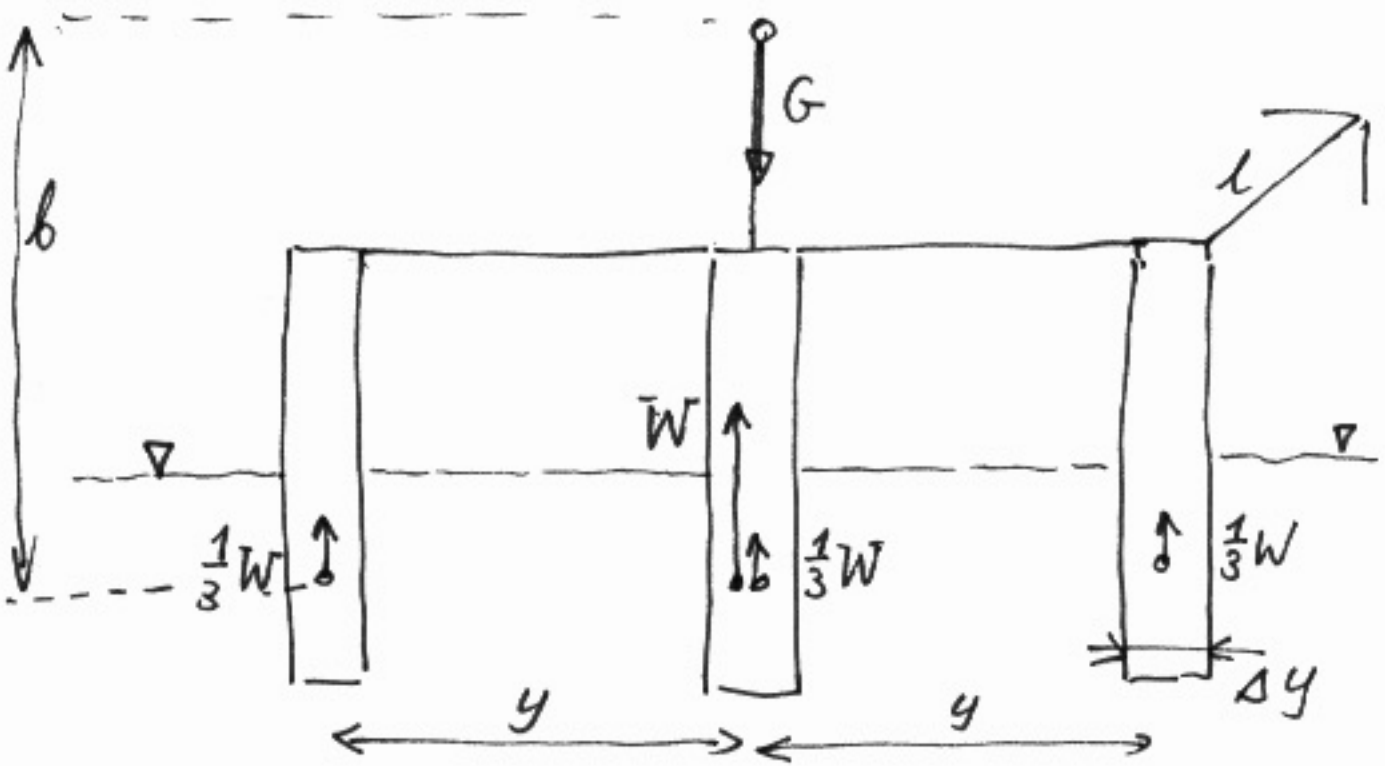
środek wyporu pokrywa się ze środkiem ciężkości – równowaga obojętna

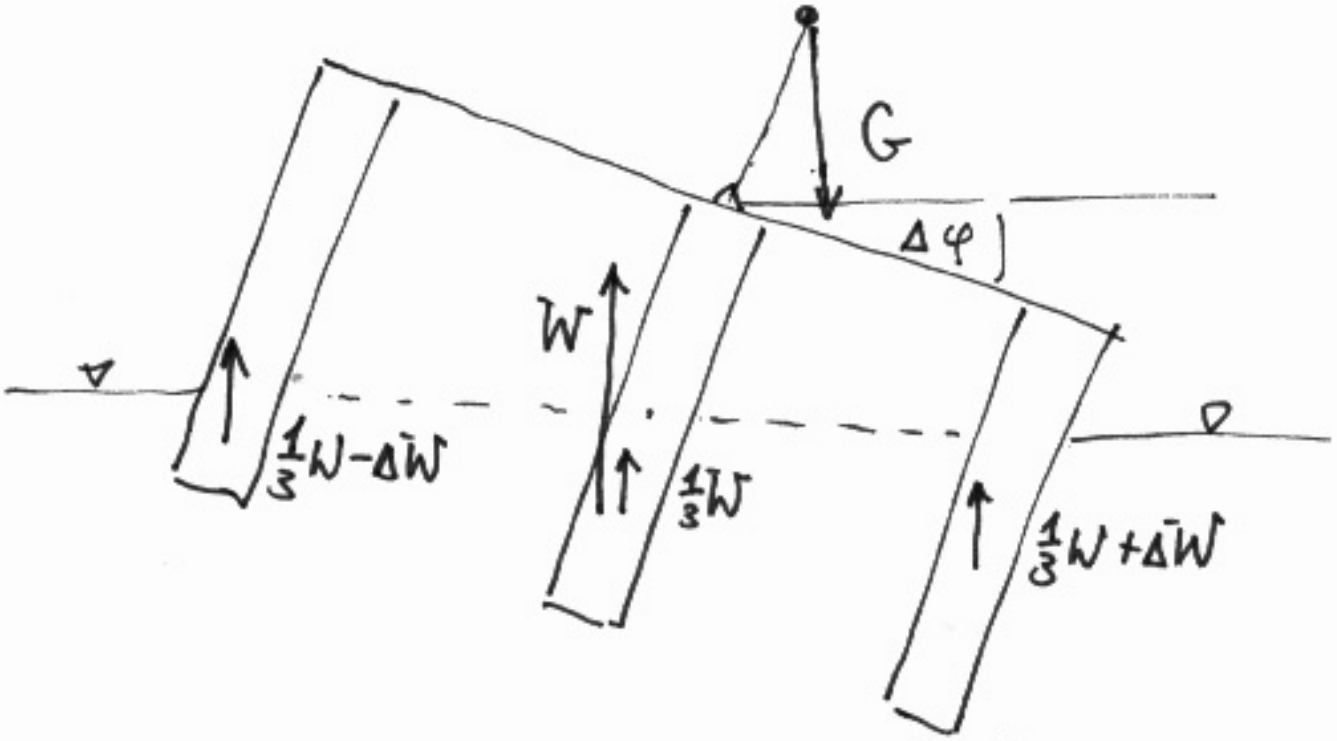
środek wyporu poniżej środkia ciężkości – równowaga chwiejna (po wstępnym wychyleniu moment pary sił $W - G$ pogłębia wychylenie)

Ciało całkowicie zanurzone jest stateczne (wychyleniowo) gdy środek wyporu leży w pionie nad środkiem ciężkości.

Stateczność ciała częściowo zanurzonego

Jeśli środek wyporu znajduje się powyżej środka ciężkości to obiekt częściowo zanurzony jest stateczny (podobnie jak w przypadku całkowitego zanurzenia). Jednak w przypadku ciała częściowo zanurzonego równowaga trwała może być osiągnięta także wtedy, gdy środek wyporu leży pod środkiem ciężkości (ponieważ podczas wychylenia pojawia się niesymetria sił wyporu i w konsekwencji moment sił przeciwdziałający początkowemu wychyleniu).





Na obiekt niewychylony działa siła wyporu $W = 3 \cdot \frac{1}{3} W$. Po wychyleniu o mały kąt $\Delta\phi$ zmienia się zanurzenie skrajnych pływaków trimaranu. Wypadkowa siła wyporu nie zmienia się $W = 3 \cdot \frac{1}{3} W + \Delta W - \Delta W$ ale pojawia się moment sił $M_0 = 2y\Delta W$, gdzie ΔW – przyrost (dodatni lub ujemny) sił wyporu skrajnych pływaków.

Moment pary sił $W - G$ jest równy $M_{WG} = Wb\Delta\phi$, gdzie b – odległość środka wyporu od środka ciężkości oraz $\Delta\phi \approx tg\Delta\phi$.

Równowaga obiektu będzie zachowana jeżeli

$$M_0 > M_{WG}$$

ΔW związana jest ze zmianą objętości zanurzonej ΔV_z pływaków zewnętrznych

$$\Delta V_z = ly\Delta\phi\Delta y$$

zatem $$\Delta W = \Delta V_z\gamma = ly\Delta\phi\Delta y\gamma ,$$

gdzie γ – ciężar właściwy wody.

Mamy więc $$M_0 = \Delta W \cdot 2y = 2y^2 l\Delta\phi\Delta y\gamma .$$

Natomiast $$M_{WG} = V_z\gamma b\Delta\phi ,$$

gdzie V_z - objętość części zanurzonej obiektu.

Warunek stateczności przyjmuje więc postać

$$2y^2 l\Delta\phi\Delta y\gamma > V_z\gamma b\Delta\phi$$

Po uproszczeniu

$$2y^2 l\Delta y > V_z b$$

lub

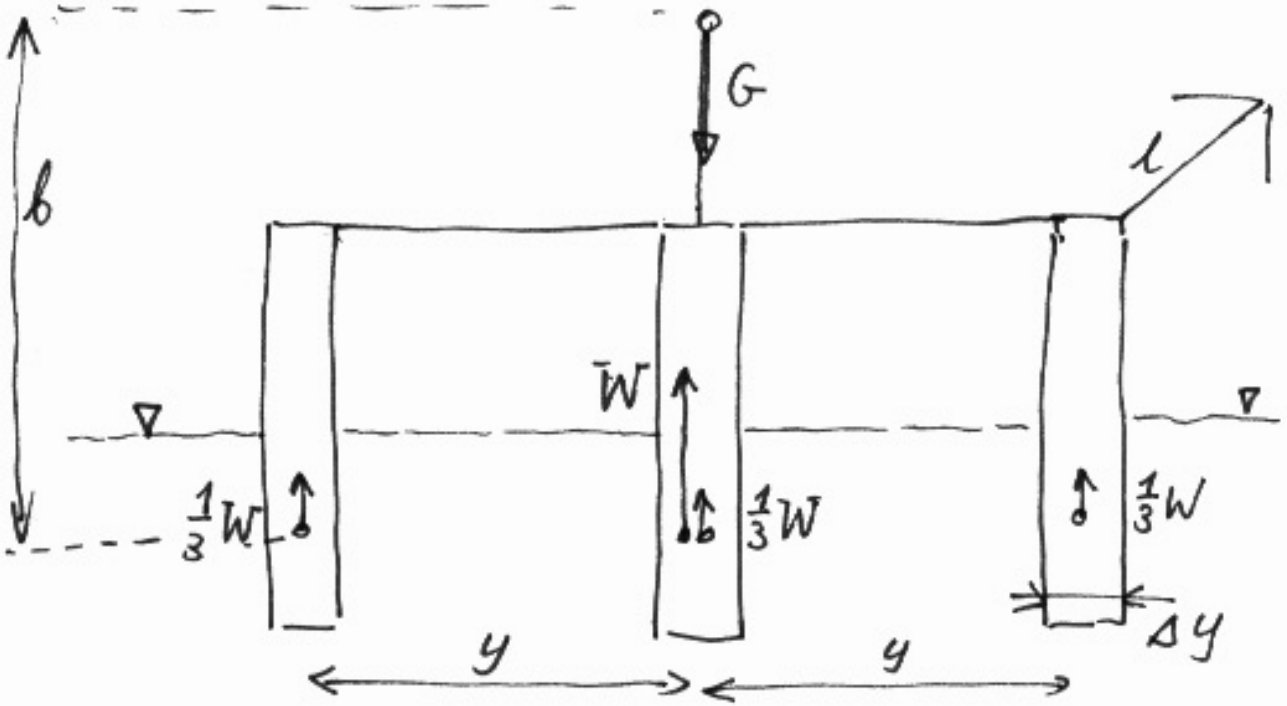
$$2\Delta Ay^2 > V_z b ,$$

gdzie $\Delta A = l\Delta y$ - patrz rysunek,

$2\Delta Ay^2$ - jest momentem bezwładności pola pływania statku (przekrój kadłuba płaszczyzną powierzchni wody).

Oznaczając $I_x = 2\Delta Ay^2$ mamy

$$I_x > V_z b$$



lub

$$\frac{I_x}{V_z} - b > 0$$

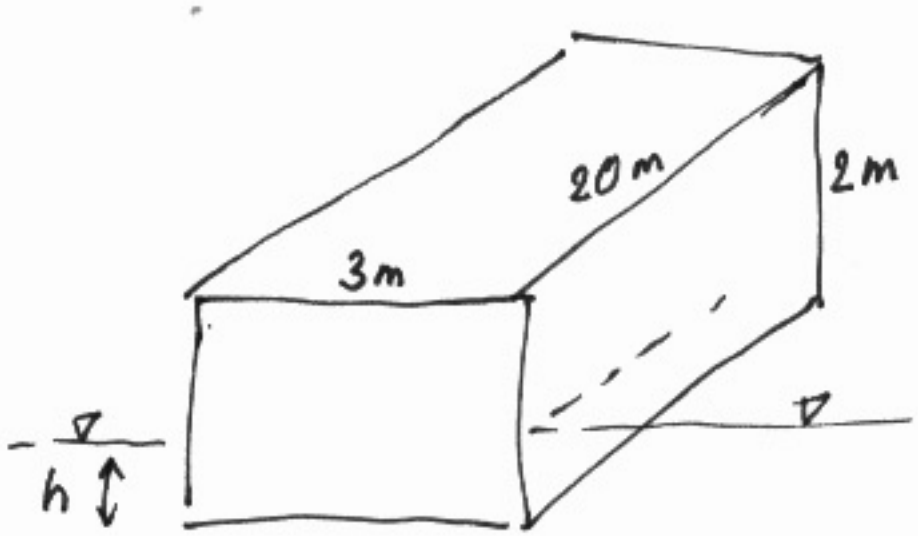
$m > 0$, gdzie $m = \frac{I_x}{V_z} - b$

m – odległość metacentryczna.

Sprawdzić stateczność pływania prostopadłościanu o gęstości $\rho = \frac{1}{2}\rho_w$

(ρ_w – gęstość wody)

- wymiary obiektu na rysunku

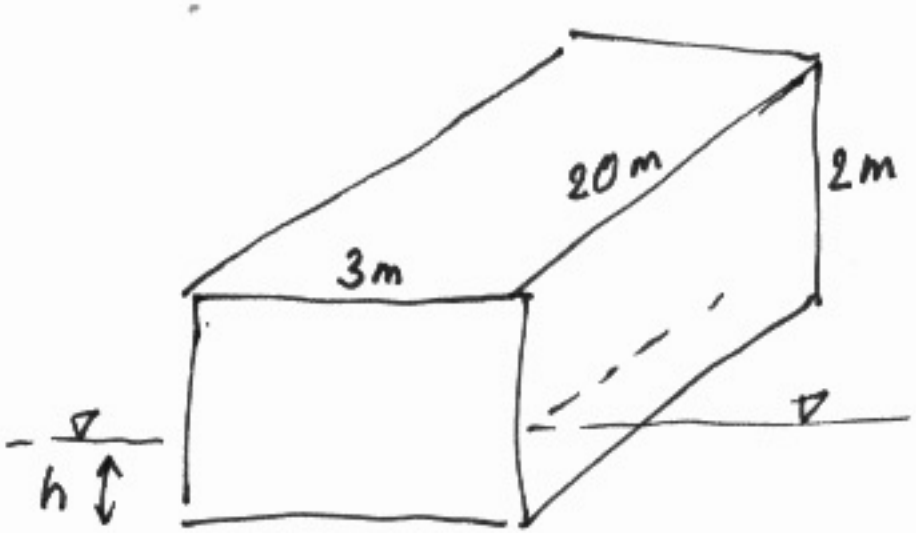


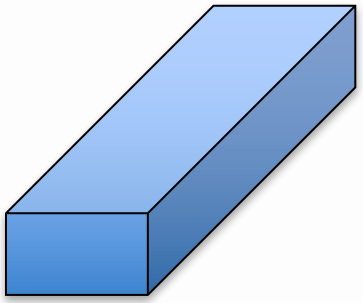
h – głębokość zanurzenia

Sprawdzić stateczność pływania prostopadłościanu o gęstości $\rho = \frac{1}{2}\rho_w$

(ρ_w – gęstość wody)

- wymiary obiektu na rysunku





h – głębokość zanurzenia

Warunek częściowego zanurzenia jest spełniony $\rho < \rho_w$, należy obliczyć głębokość zanurzenia h.

Siła wyporu $W = V_2\gamma_w = 3 \cdot 20 \cdot h \cdot \gamma_w = 3 \cdot 20 \cdot h \cdot \rho_w \cdot g$

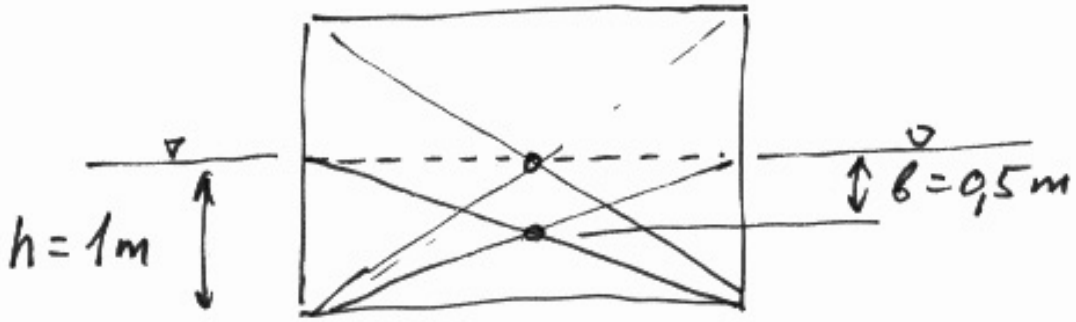
Ciężar obiektu $G = V \cdot \frac{1}{2}\rho_w \cdot g = 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2}\rho_w \cdot g$

Z warunku pływania $W = G$ mamy następujący

$$3 \cdot 20 \cdot h \cdot \rho_w \cdot g = 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2}\rho_w \cdot g$$

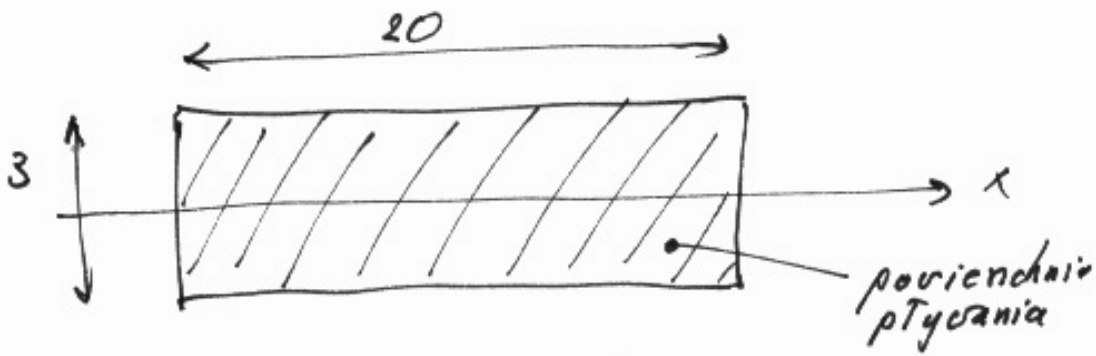
skąd $h = 1\text{m}$.

Zakładając, że środek ciężkości prostopadłościanu leży w jego środku geometrycznym (wykonany z jednorodnego materiału) otrzymujemy $b = 0{,}5\text{m}$.



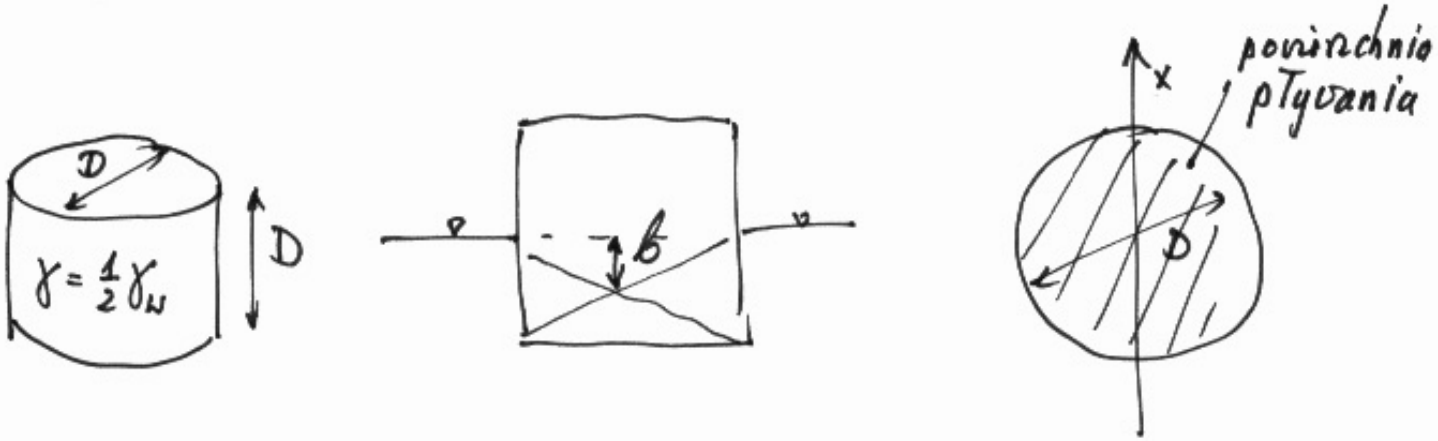
Objętość części zanurzonej $V_z = 1 \cdot 2 \cdot 20 = 40$

Moment bezwładności powierzchni pływania $I_x = \frac{20 \cdot 3^3}{12} = 45$



$\frac{I_x}{V_z} - b = \frac{45}{40} - 0{,}5 > 0$ - stateczny!

Sprawdzić stateczność boi w kształcie walca – rysunek

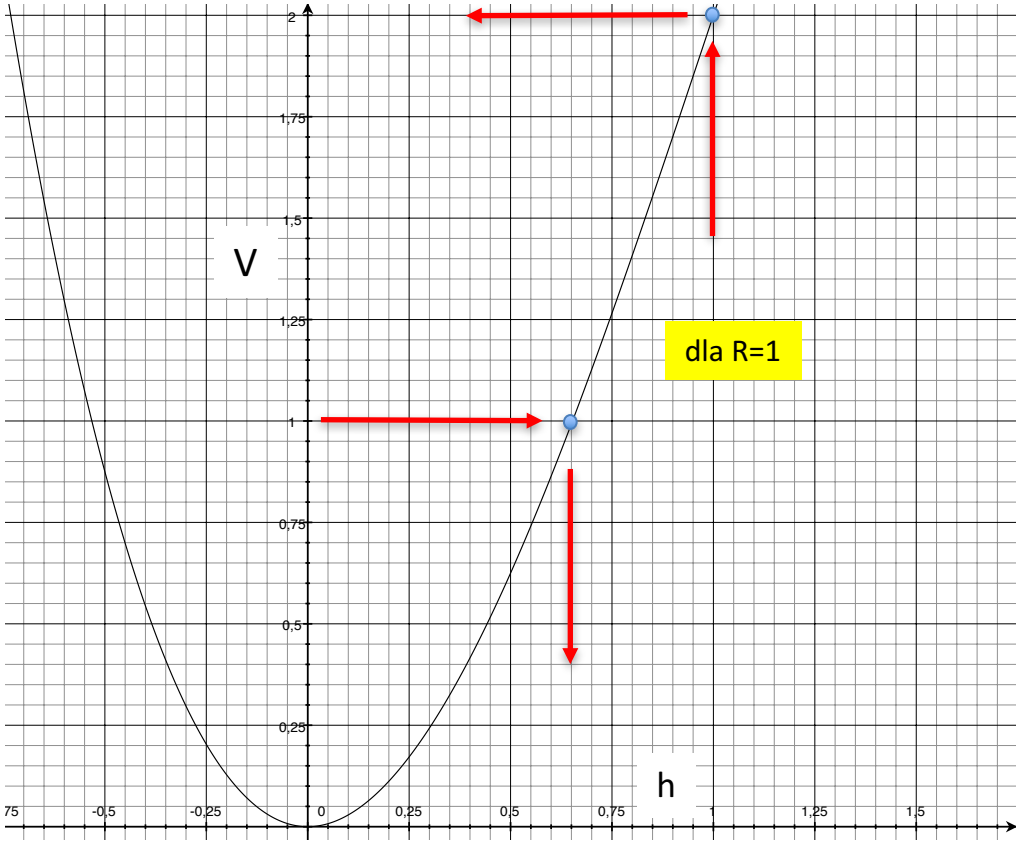


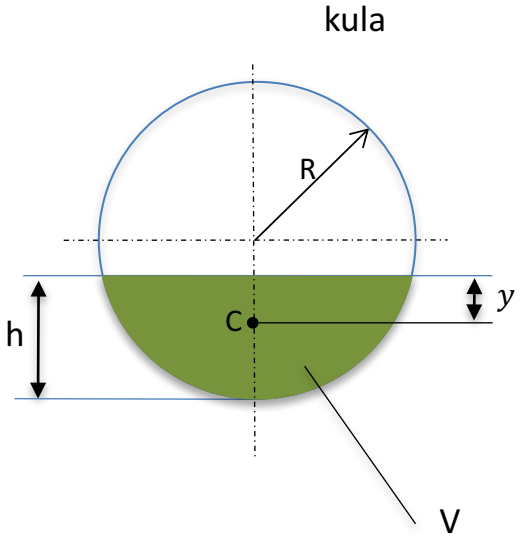
Ponieważ $\gamma = \frac{1}{2}\gamma_w$, to zanurzenie będzie do połowy wysokości.

Znajdujemy: $b = \frac{1}{4}D, \quad V_z = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2}, \quad I_x = \frac{\pi D^4}{64}$

$$\frac{I_x}{V_z} - b = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{\pi D^3}{8}} - \frac{1}{4}D = \frac{D}{8} - \frac{D}{4} < 0$$ - niestateczna!

Wykres 1

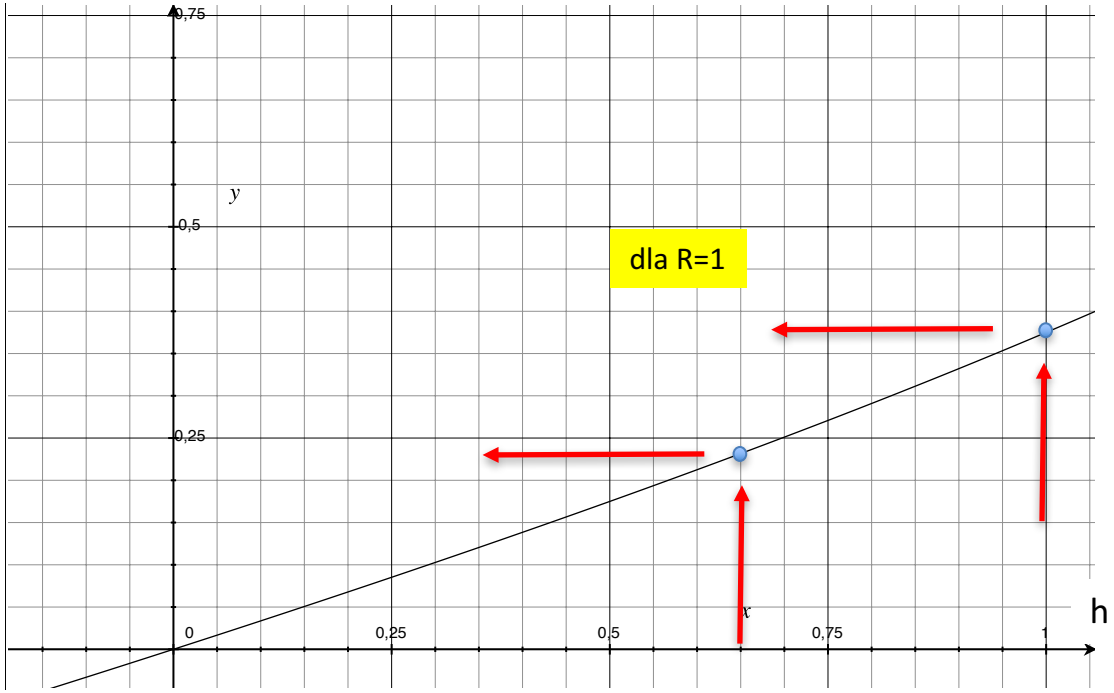


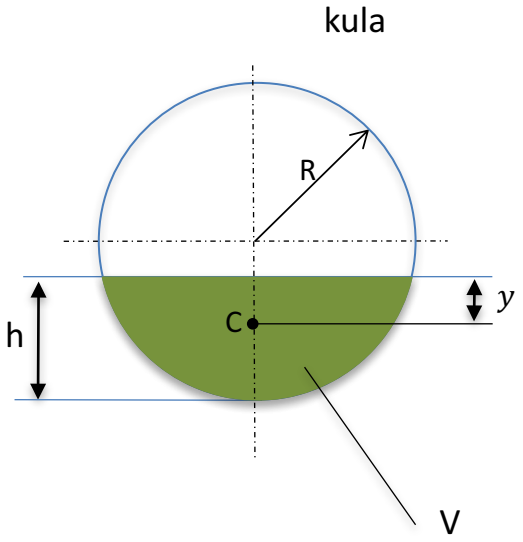


$$V = \pi R h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$$

$$y = \frac{4Rh - h^2}{12R - 4h}$$

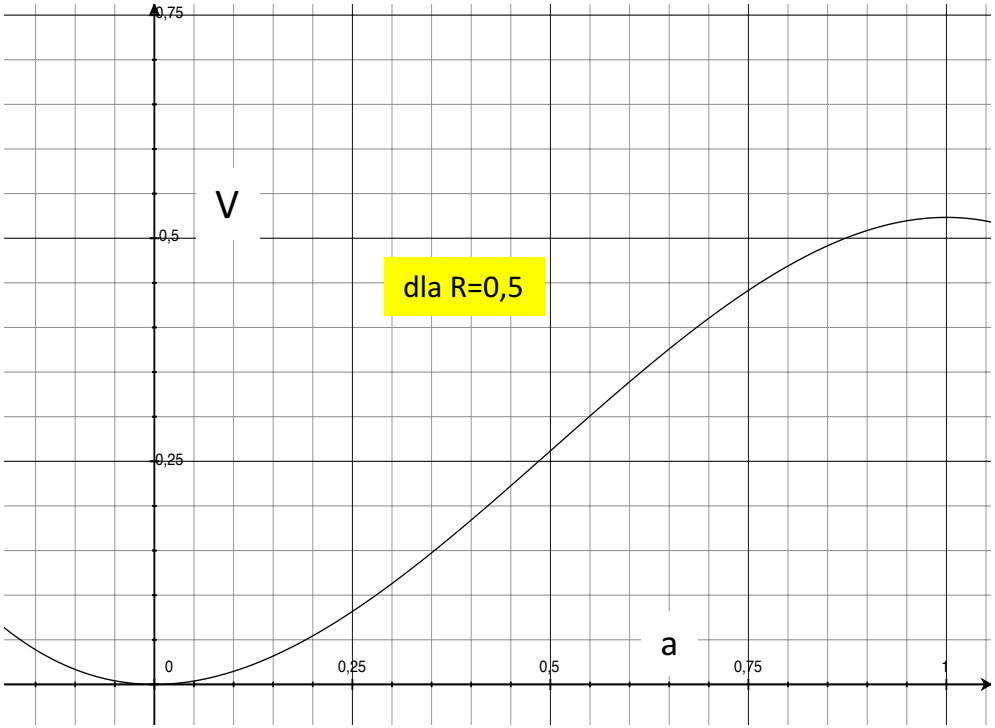
Wykres 2

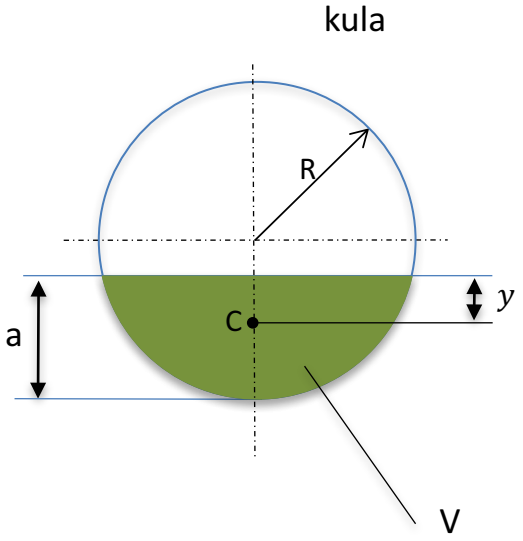




$$V = \pi R h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$$

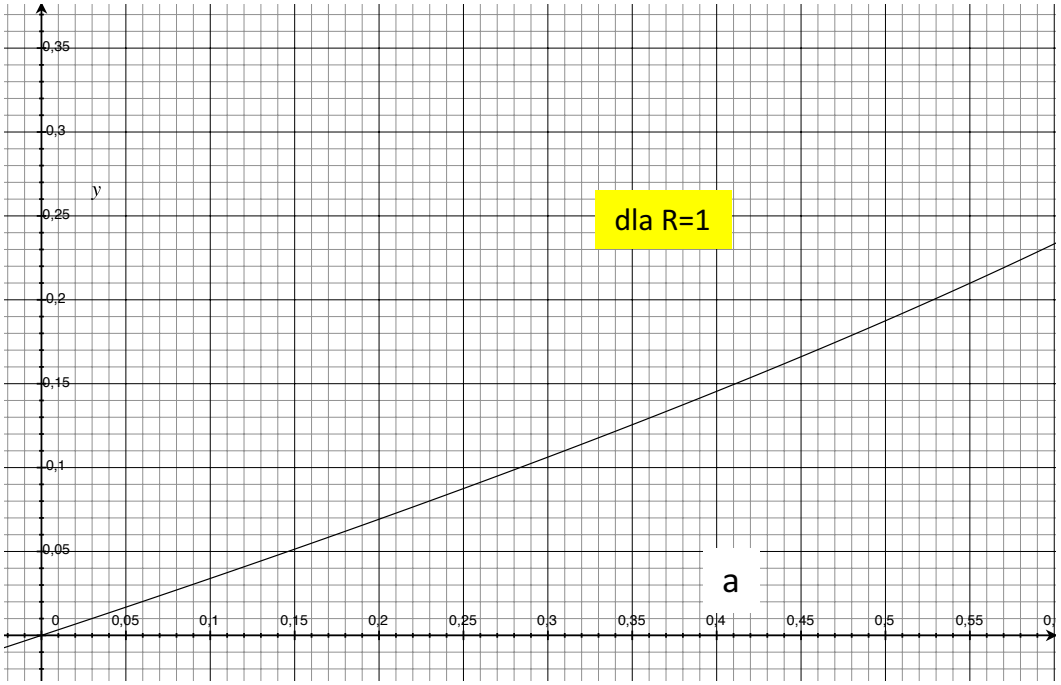
$$y = \frac{4Rh - h^2}{12R - 4h}$$

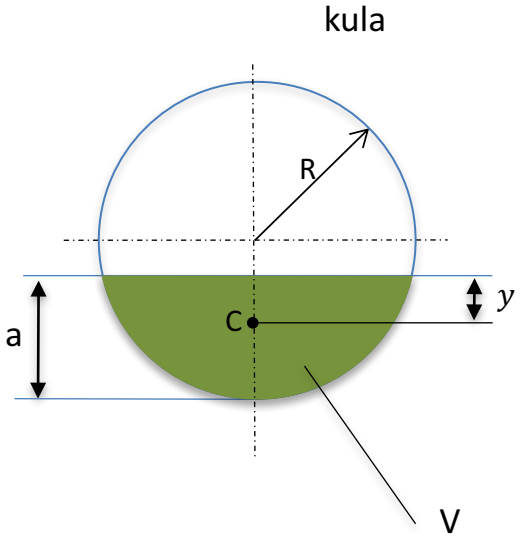




$$V = \pi R a^2 - \frac{\pi}{3} a^3$$

$$y = \frac{4Ra - a^2}{12R - 4a}$$





$$V = \pi R a^2 - \frac{\pi}{3} a^3$$

$$y = \frac{4Ra - a^2}{12R - 4a}$$

$H = R = 1 \rightarrow (z\ wykresu\ 1) \rightarrow V = 2{,}1$

$G = V\gamma = 10470$

$V_z = \frac{G}{\gamma_w} = 1{,}04$

$V = 1{,}04;\ R = 1 \rightarrow (z\ wykresu\ 1) \rightarrow h = 0{,}65$

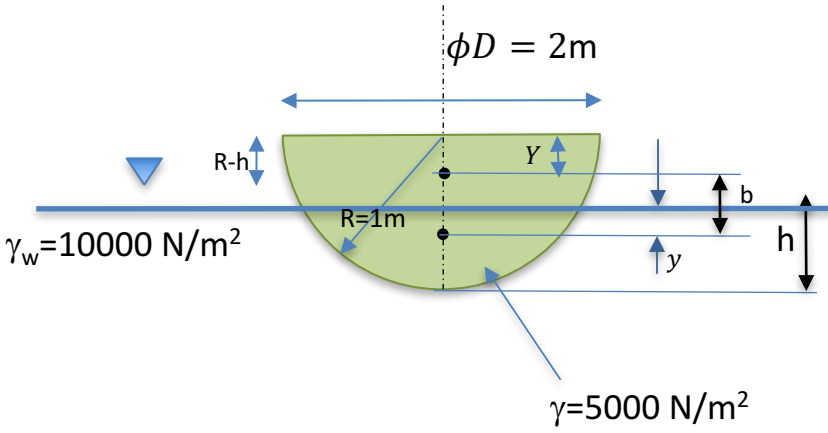
$h = 0{,}65;\ R = 1 \rightarrow (z\ wykresu\ 2) \rightarrow y = 0{,}225$

$H = R = 1 \rightarrow (z\ wykresu\ 2) \rightarrow Y = 0{,}375$

$b = y + R - h - Y = 0{,}2$

$I_x = \pi \frac{d^4}{64} = 0{,}6 \quad (d = 1{,}876)$

$\frac{I_x}{V_z} - b = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4 = m > 0 \rightarrow stateczny$



$G = \pi R^2 \gamma = 15708$

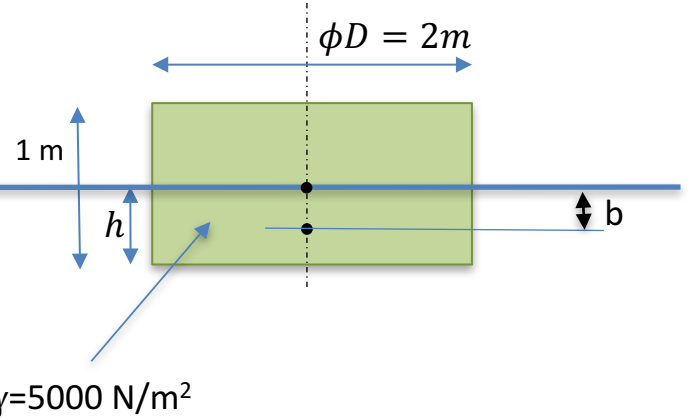
$V_z = \frac{G}{\gamma_w} = 1{,}57$

$h = \frac{V_z}{\pi R^2} = 0{,}5$

$b = 0{,}25$

$I_x = \pi \frac{D^4}{64} = 0{,}79$

$\frac{I_x}{V_z} - b = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25 = m > 0 \rightarrow stateczny$



$$H = R = 1 \rightarrow (z\ wykresu\ 1) \rightarrow V = 2{,}1$$

$$G = V\gamma = 10470$$

$$V_z = \frac{G}{\gamma_w} = 1{,}04$$

$$V = 1{,}04;\ R = 1 \rightarrow (z\ wykresu\ 1) \rightarrow h = 0{,}65$$

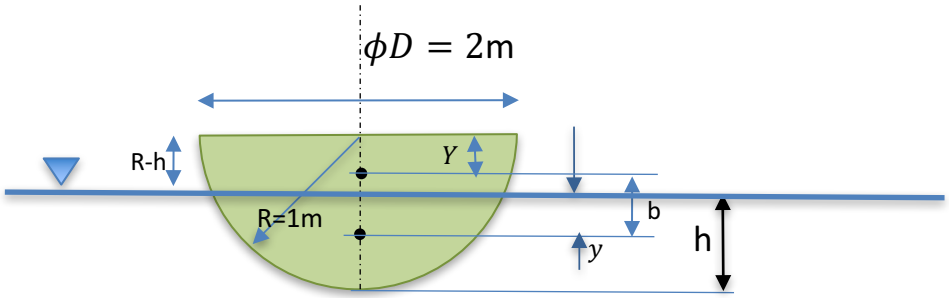
$$h = 0{,}65;\ R = 1 \rightarrow (z\ wykresu\ 2) \rightarrow y = 0{,}225$$

$$H = R = 1 \rightarrow (z\ wykresu\ 2) \rightarrow Y = 0{,}375$$

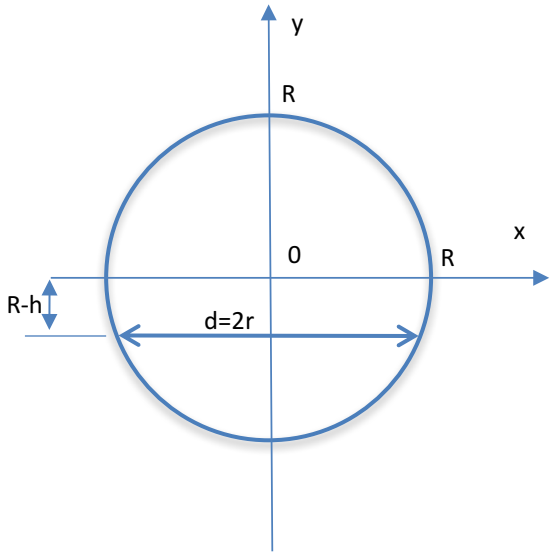
$$b = y + R - h - Y = 0{,}2$$

$$I_x = \pi\frac{d^4}{64} = 0{,}6 \quad (d = 1{,}876)$$

$$\frac{I_x}{V_z} - b = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4 = m > 0 \rightarrow stateczny$$



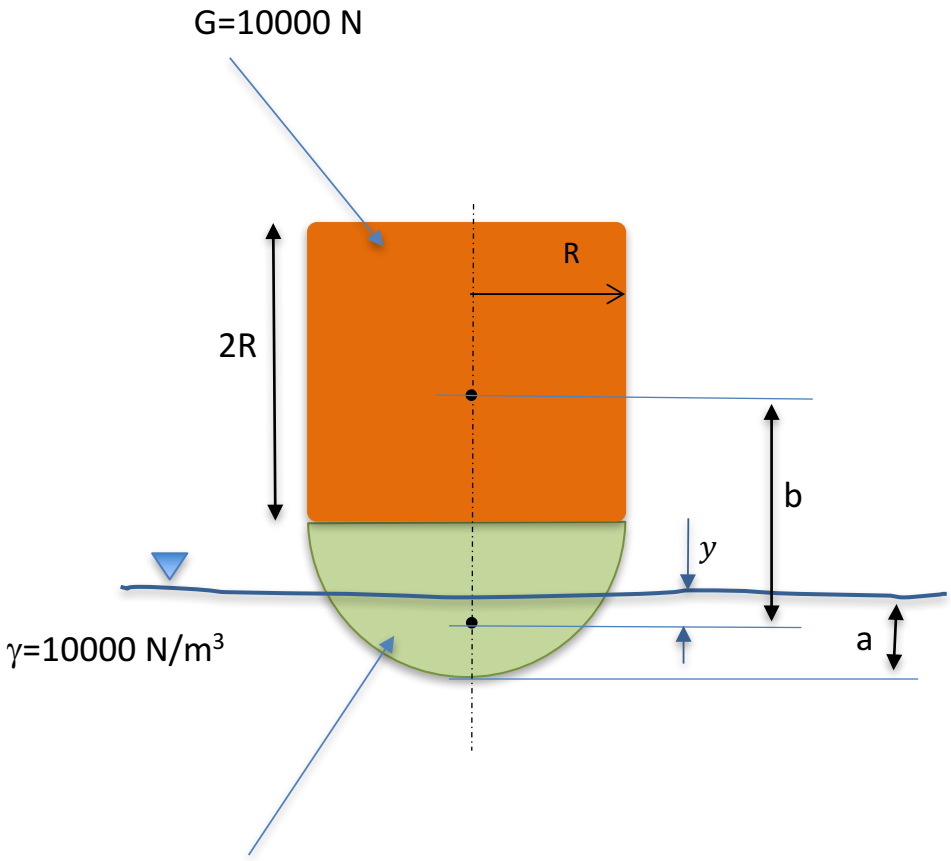
$$x^2 + y^2 = R^2 = 1$$



$$x^2 + (h - R)^2 = 1$$

$$x = r = 0{,}938$$

$$d = 1{,}876$$



R=1 m

$$V = \frac{G}{\gamma}$$

$$a = 0{,}65$$

$$y =$$

$$b =$$

MECHANIKA PŁYNÓW

REAKCJE HYDRODYNAMICZNE

Zasada zachowania pędu. Reakcje hydrodynamiczne

Wykorzystując znaną z mechaniki relację między siłą $\vec{F}$ i pędem $m\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\left(m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}$$

otrzymujemy

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\left(m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

Zakładając, że $\vec{v}$ nie zmienia się w czasie

$$\vec{F} = \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \vec{v}q_m = \vec{v}\rho q$$

Iloczyn $\vec{v}q_m = \vec{v}\rho q$ jest pędem strumienia płynu.

Aby zmienić pęd płynu z wartości $\left(\vec{v}\rho q\right)_1$ do $\left(\vec{v}\rho q\right)_2$ potrzebna jest siła $\vec{F}$

$$\vec{F} = \left(\vec{v}\rho q\right)_2 - \left(\vec{v}\rho q\right)_1$$

Siłę $\vec{R}$ przeciwną do $\vec{F}$ nazywamy reakcją dynamiczną strumienia

$$\vec{R} = -\vec{F} = \left(\vec{v}\rho q\right)_1 - \left(\vec{v}\rho q\right)_2$$

Siłę $\vec{R}$ przeciwną do $\vec{F}$ nazywamy reakcją dynamiczną strumienia

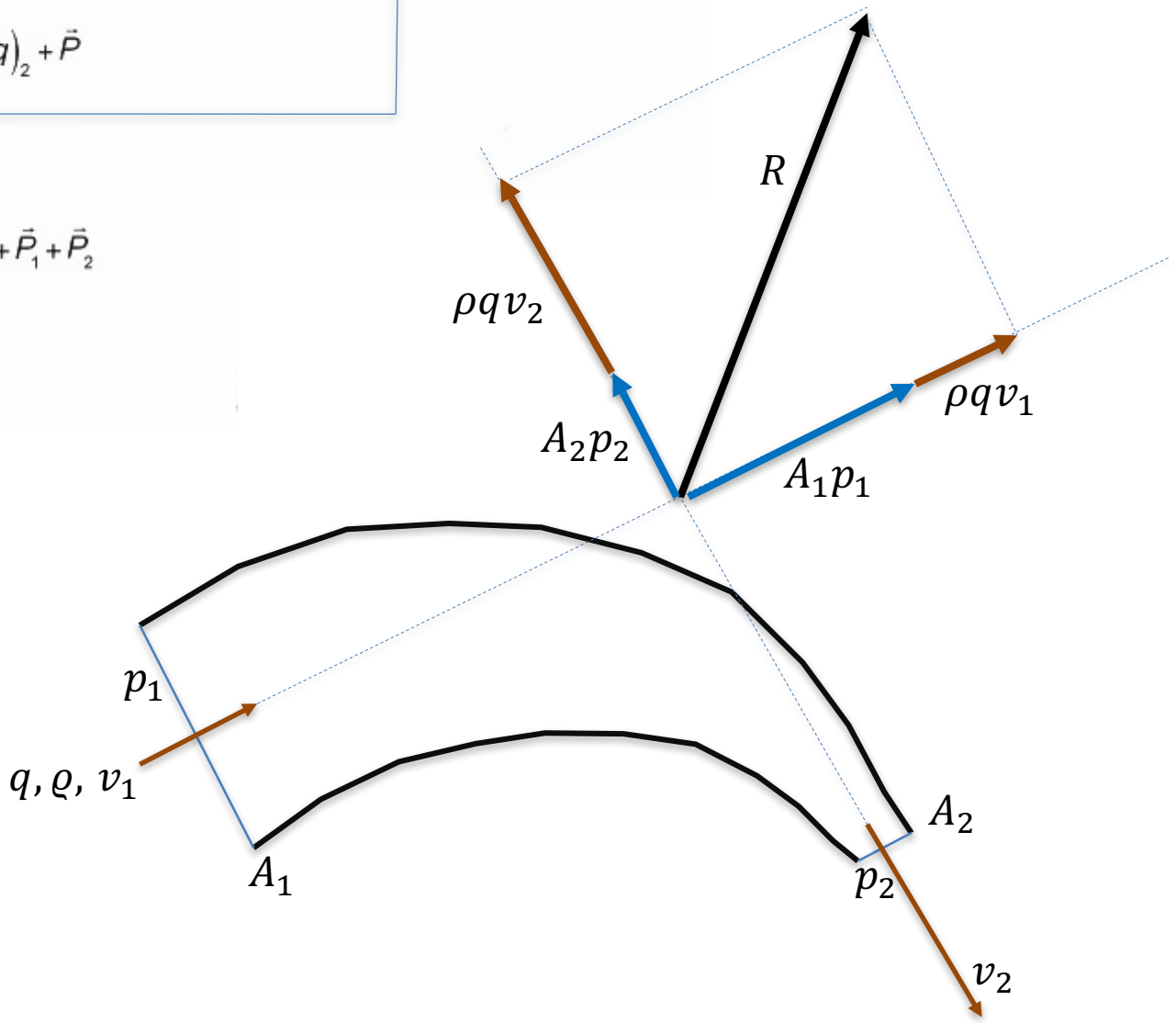
$$\vec{R} = -\vec{F} = \left(\vec{v}\rho q\right)_1 - \left(\vec{v}\rho q\right)_2$$

Gdy płyn znajduje się w obszarze zamkniętym (w przewodzie), gdzie panuje nadciśnienie, należy dodatkowo uwzględnić siły od ciśnienia $\vec{P}$

$$\vec{R} = \left(\vec{v}\rho q\right)_1 - \left(\vec{v}\rho q\right)_2 + \vec{P}$$

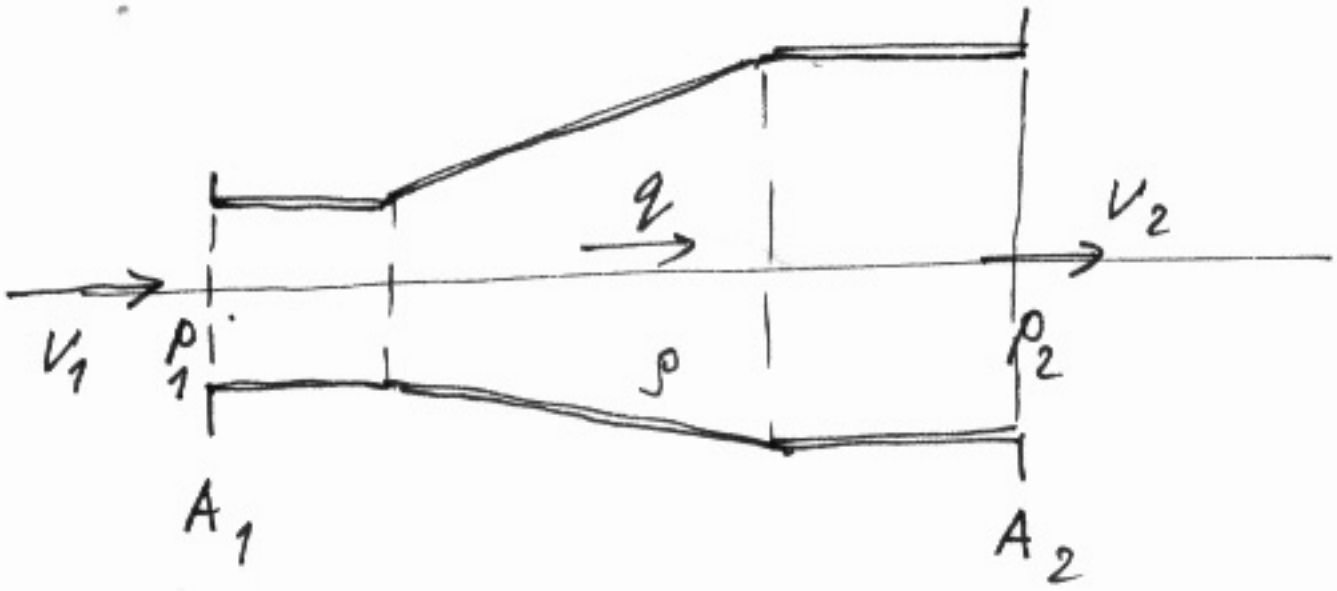
Przykład 1

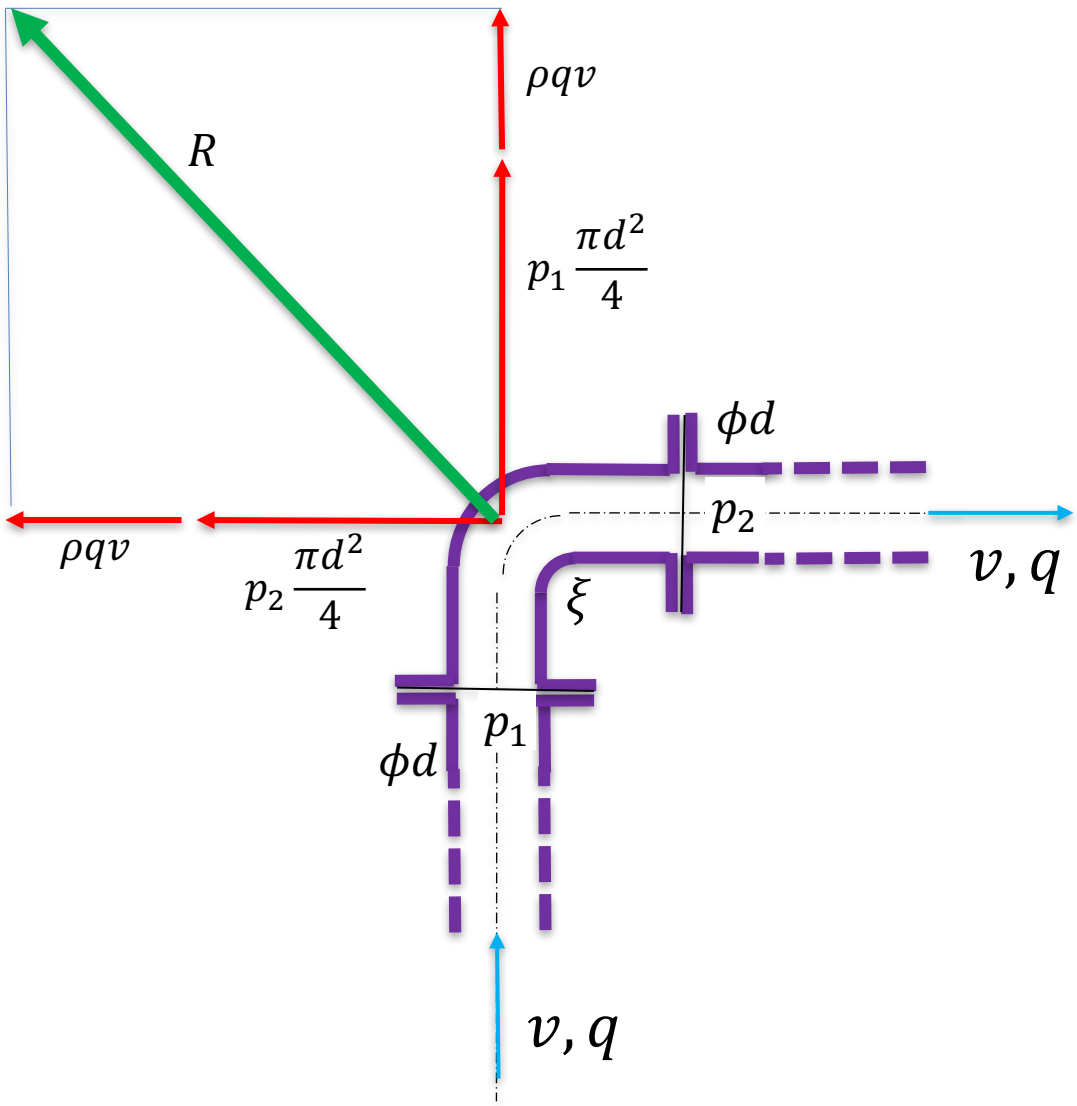
$$\vec{R} = \rho q\vec{v}_1 - \rho q\vec{v}_2 + \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$
$$P_1 = p_1 A_1$$
$$P_2 = p_2 A_2$$



Przykład 2

$$R = \rho q v_1 - \rho q v_2 + A_1 p_1 - A_2 p_2$$

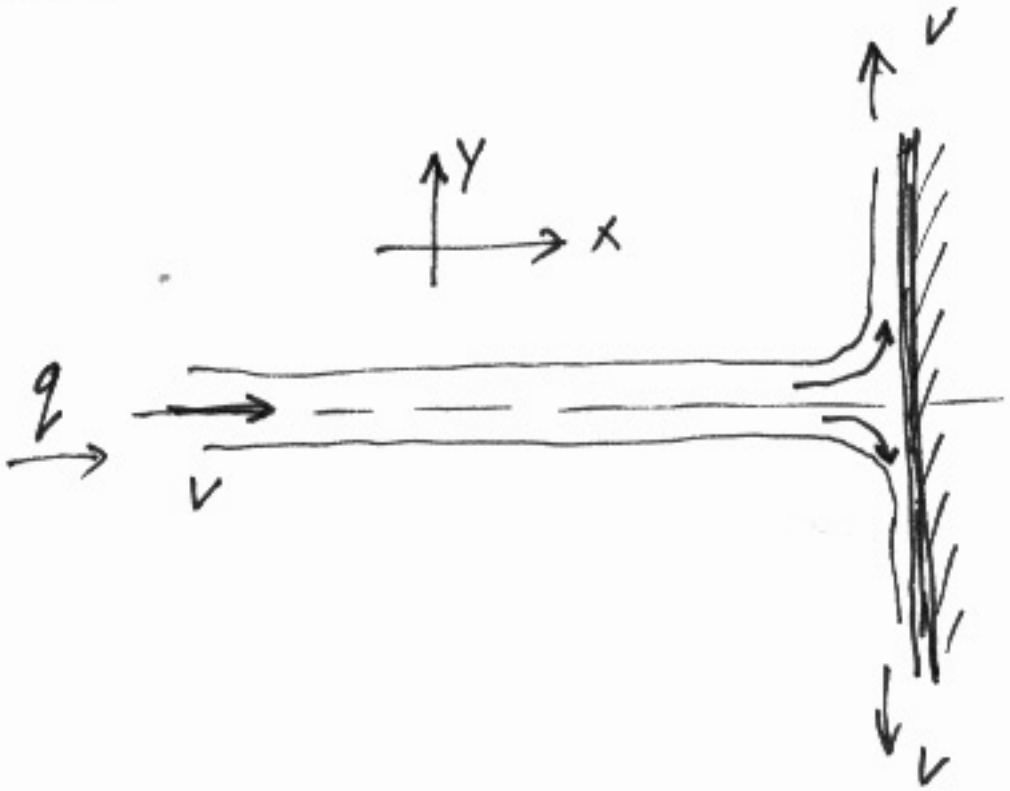




$$h_{str} = \xi \frac{v^2}{2g}$$

$$p_2 - p_1 = \gamma h_{str} = \gamma \xi \frac{v^2}{2g}$$

Przykład 4



$R_y = 0, \quad R_x = R = \rho q v$

Przykład 3

$$R_x = \rho q v_{1x} - \rho q v_{2x} = \rho q v - \rho q v \cos\alpha$$

$$R_y = \rho q v_{1y} - \rho q v_{2y} = -\rho q v \sin\alpha$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

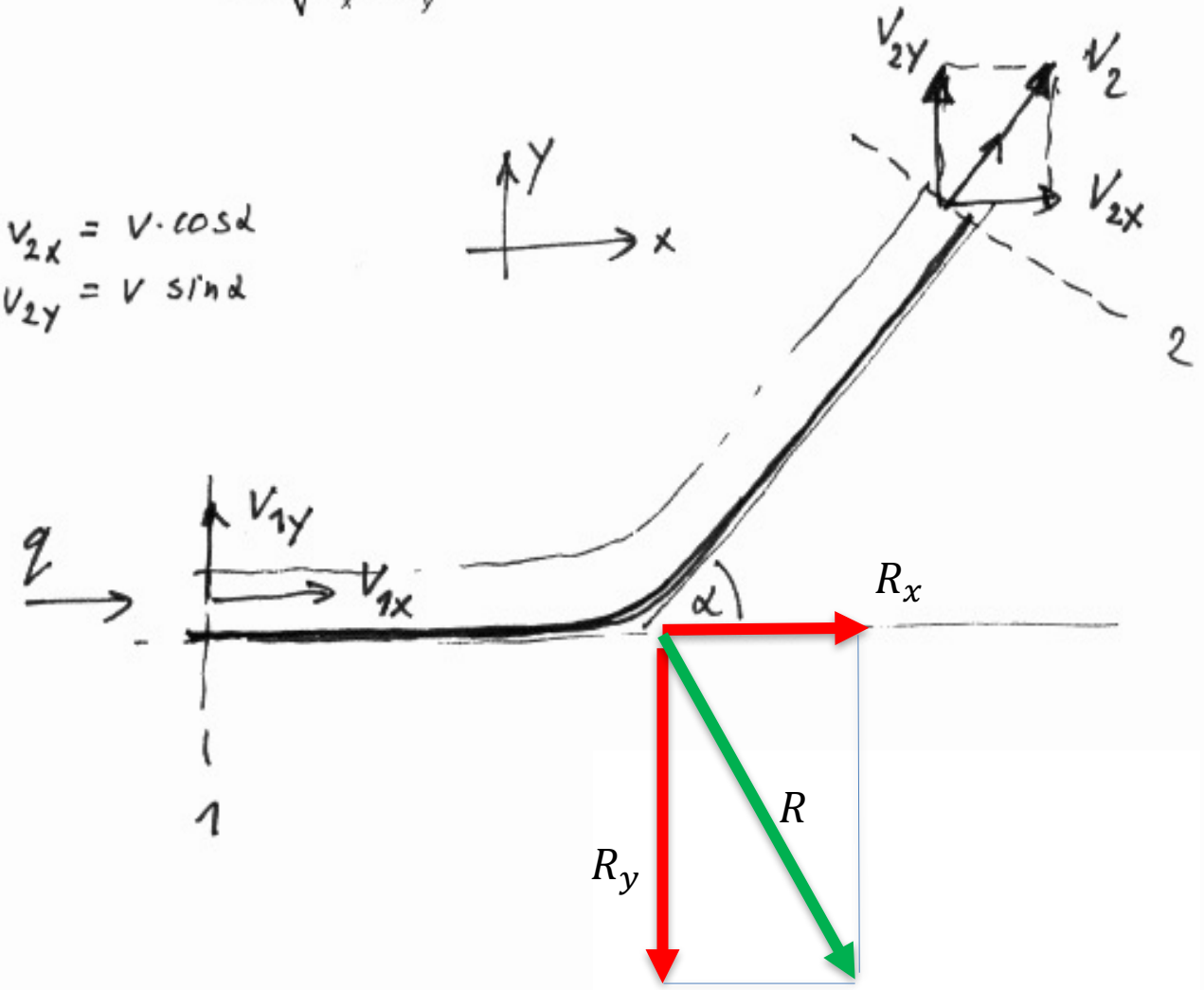
$v_1 = v_2$

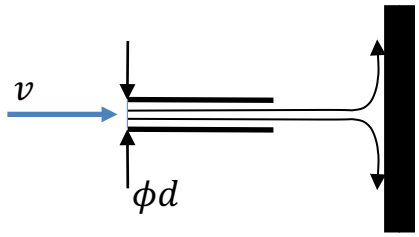
$v_{1x} = v_1$

$v_{1y} = 0$

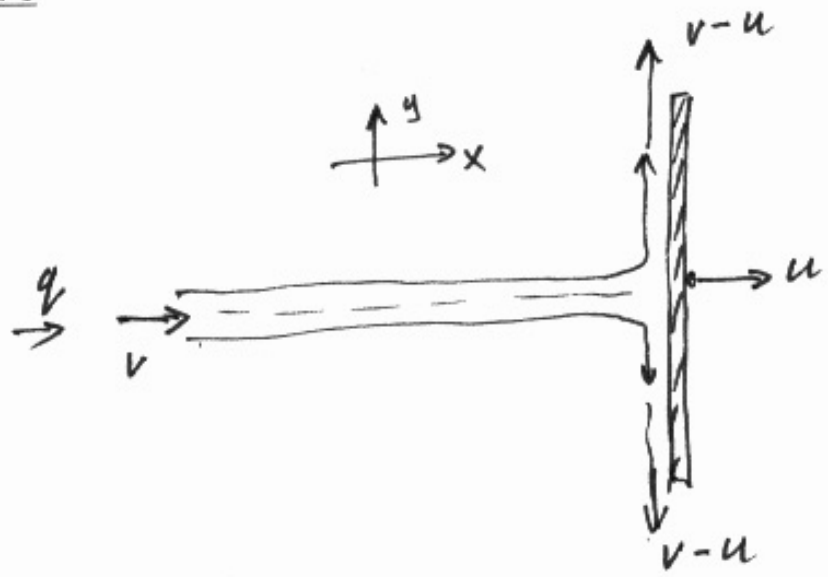
$v_{2x} = v \cdot \cos\alpha$

$v_{2y} = v \sin\alpha$




v
ϕd

Przykład 5

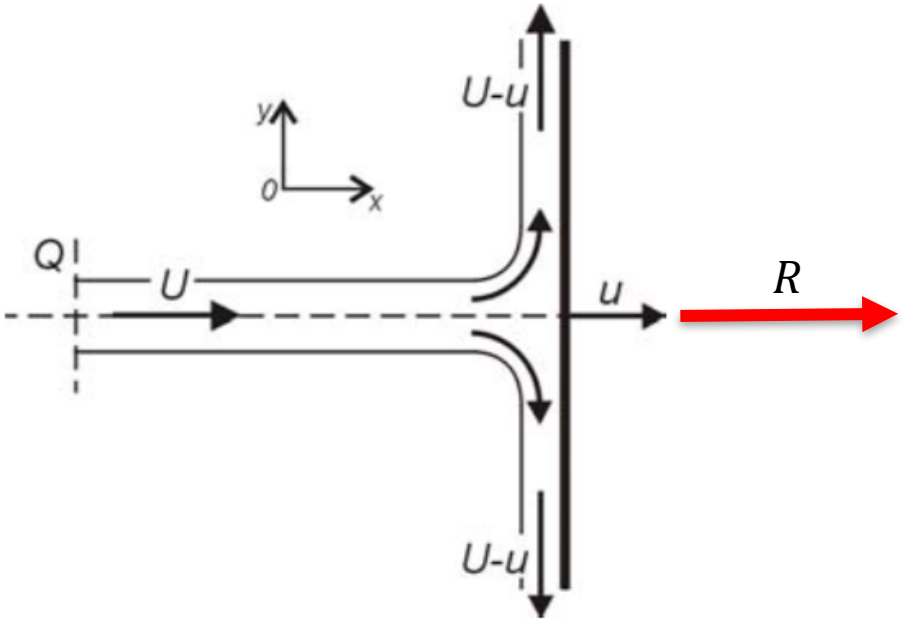


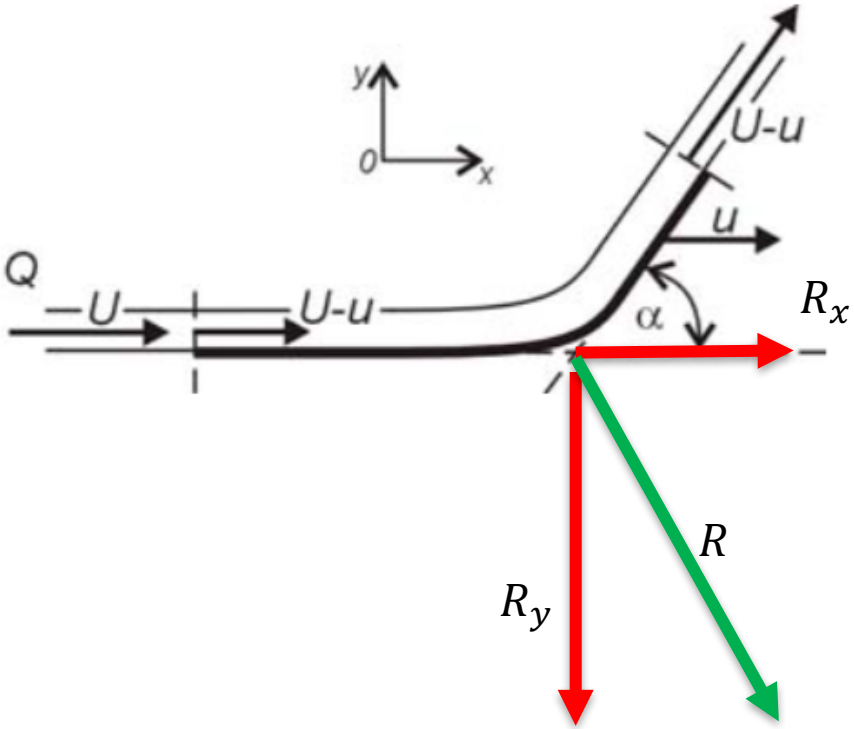
v – prędkość strumienia cieczy
u – prędkość płytki, w którą uderza ciecz
$v - u$ – prędkość strumienia względem płytki
$q = av$ – natężenie przepływu
$q' = A(v-u)$ – natężenia przepływu mierzone względem ruchomej płytki
A – powierzchnia przekroju strumienia cieczy

$$R = \rho q'(v-u) = \rho A(v-u)^2$$

z $q = Av$ mamy $A = \frac{q}{v}$, a po podstawieniu

$$R = \rho q \frac{(v-u)^2}{v}$$





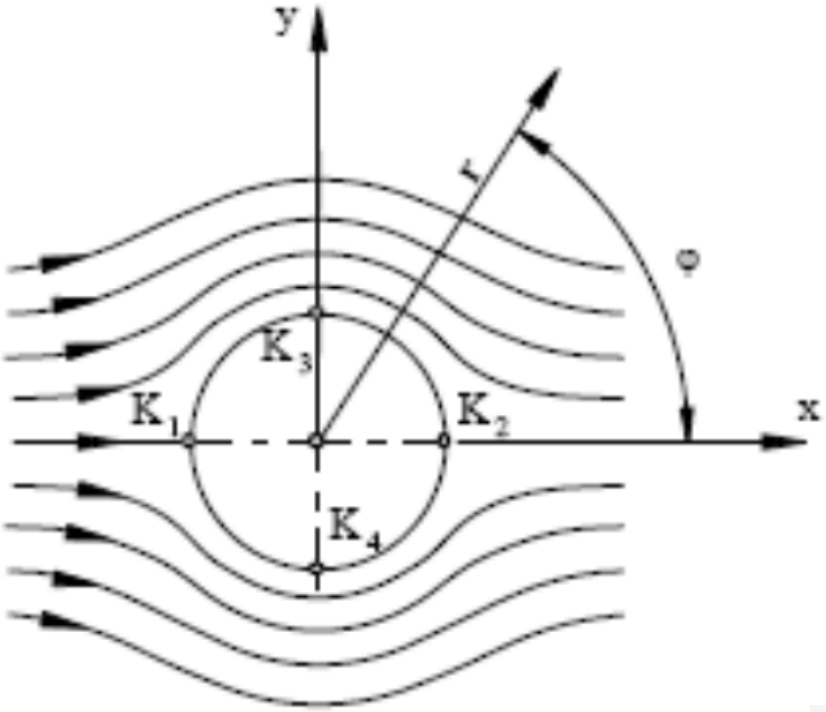
$$R = \rho Q \frac{(U-u)^2}{U}$$

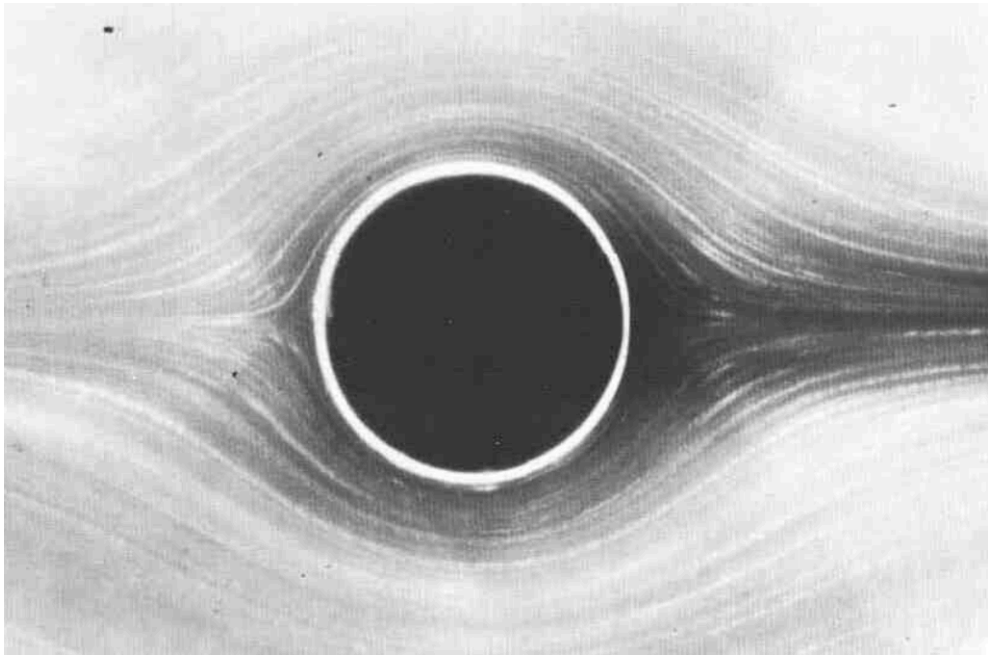
$$R_x = \rho Q \frac{(U-u)^2}{U}(1-\cos\alpha)$$

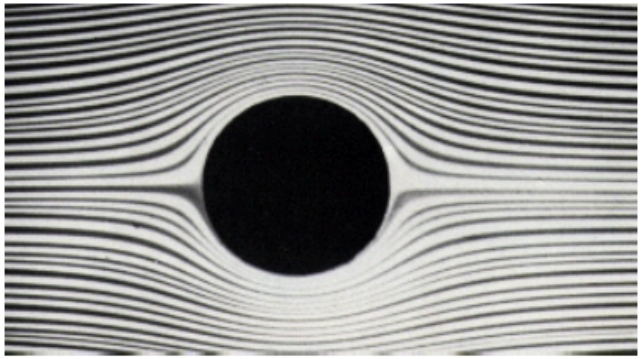
$$R_y = -\rho Q \frac{(U-u)^2}{U}\sin\alpha\,.$$

MECHANIKA PŁYNÓW

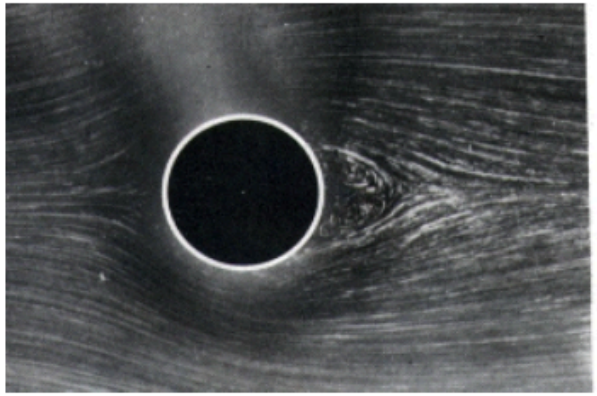
PRZEPŁYWY ZEWNĘTRZNE (opływy)


y
r
φ
K3
K1
K2
x
K4

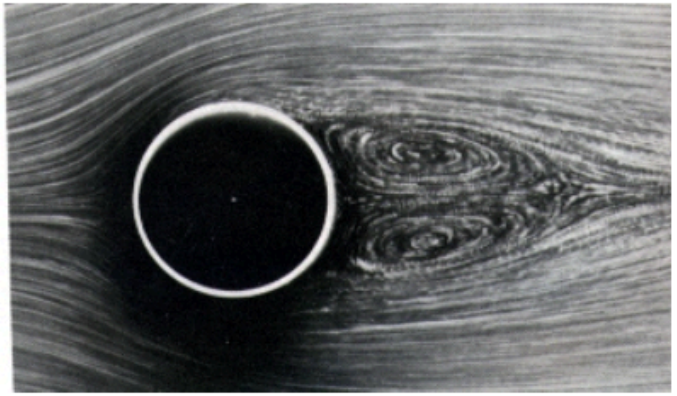




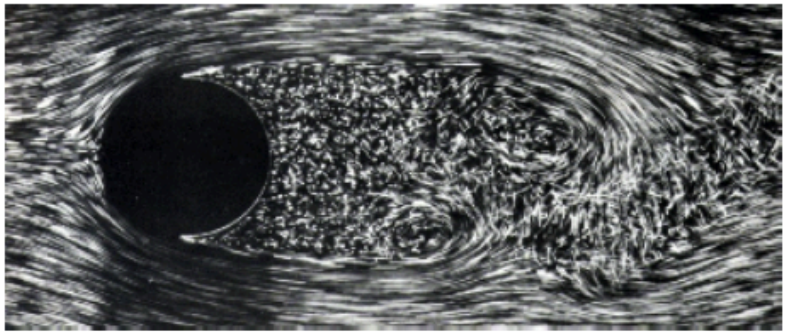
Re=0.1



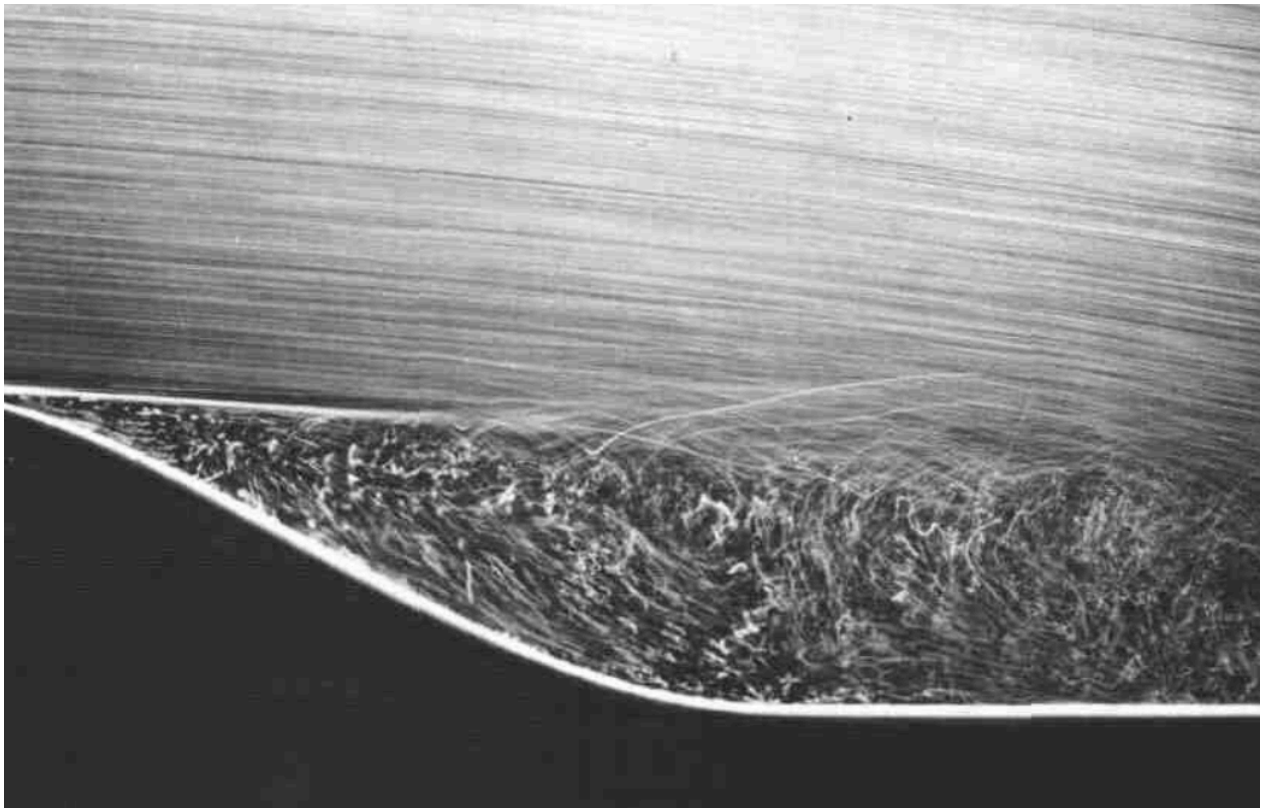
Re=13

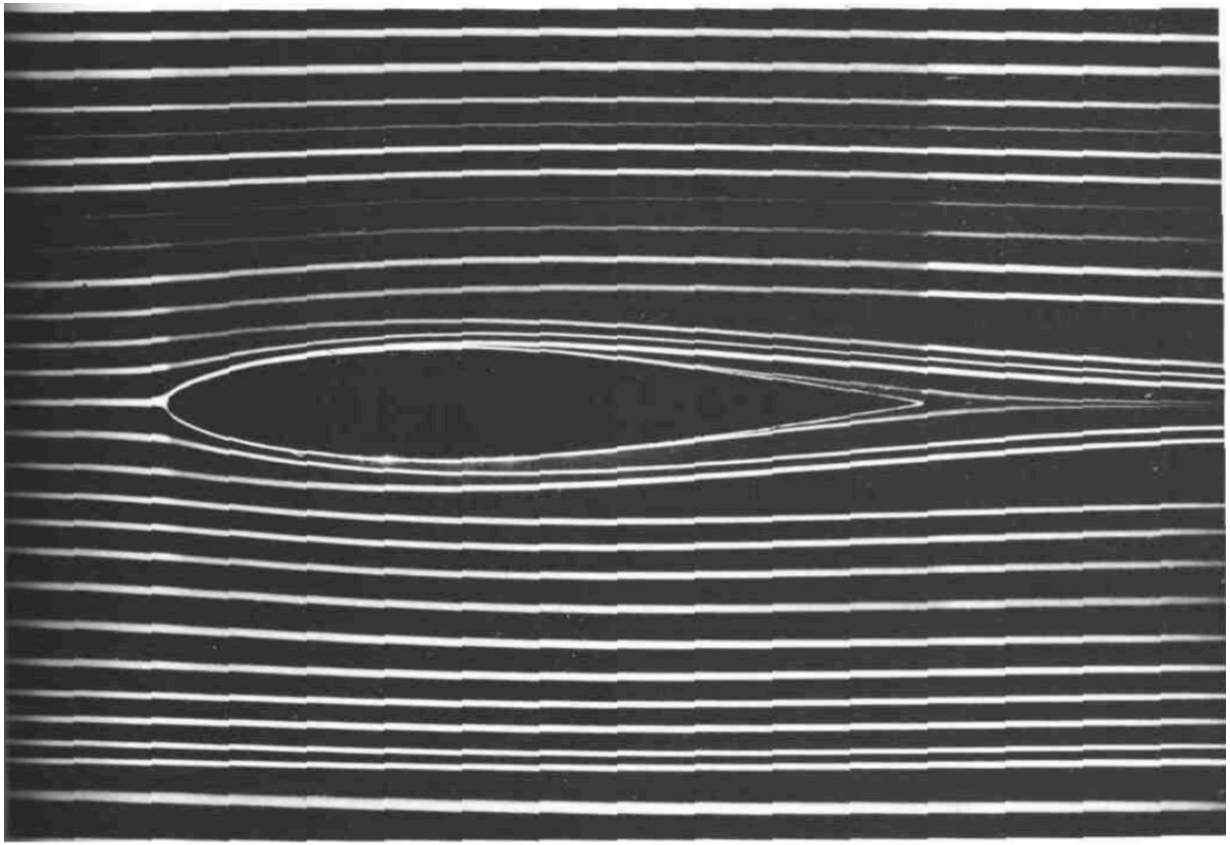


Re=26

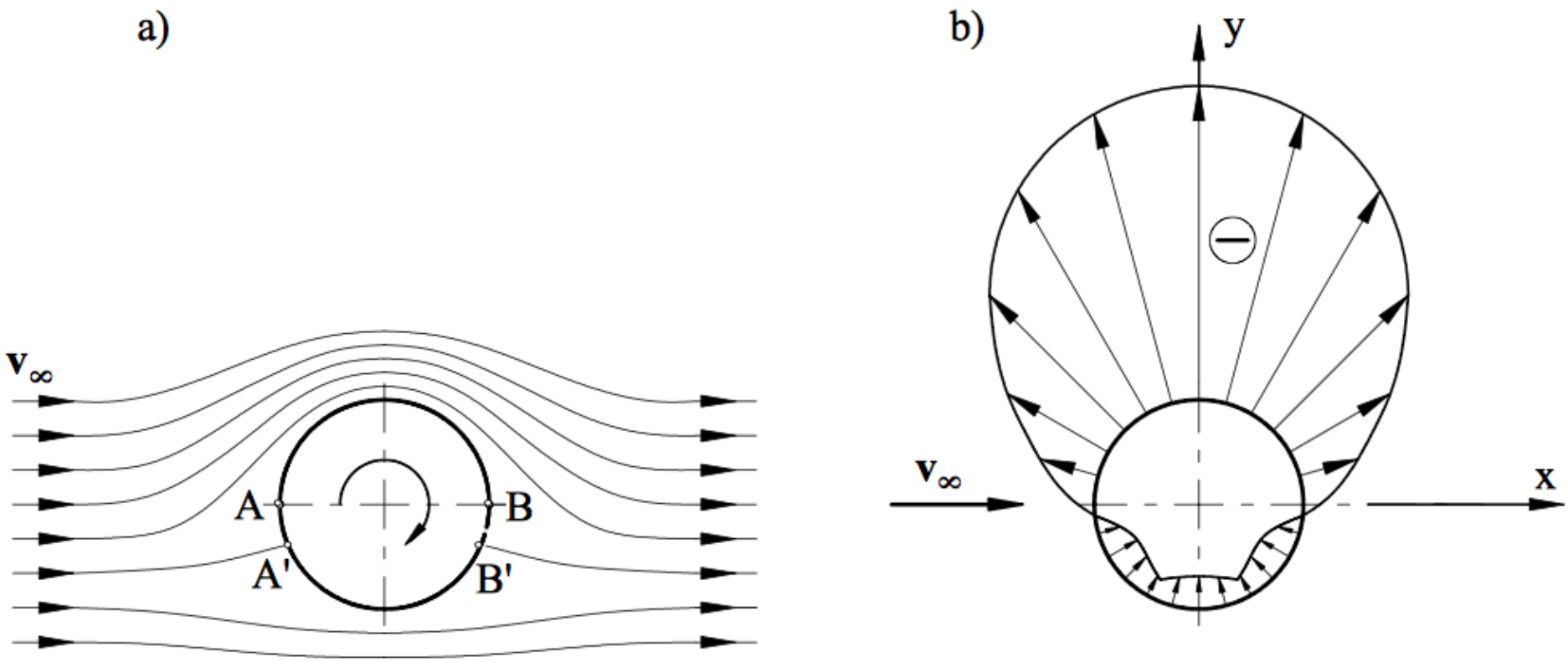


Re=2000

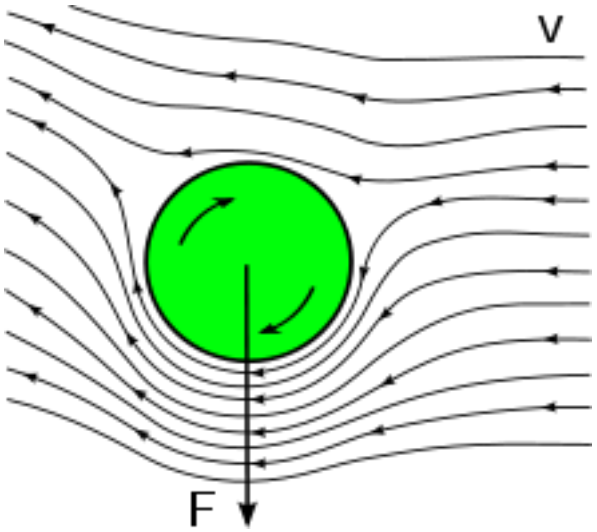




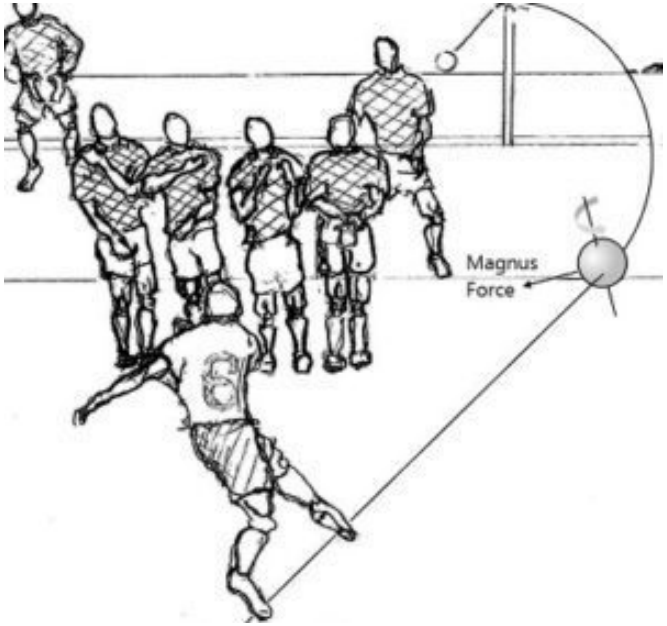
Symetryczny laminarny opływ profilu NASA 64AO15

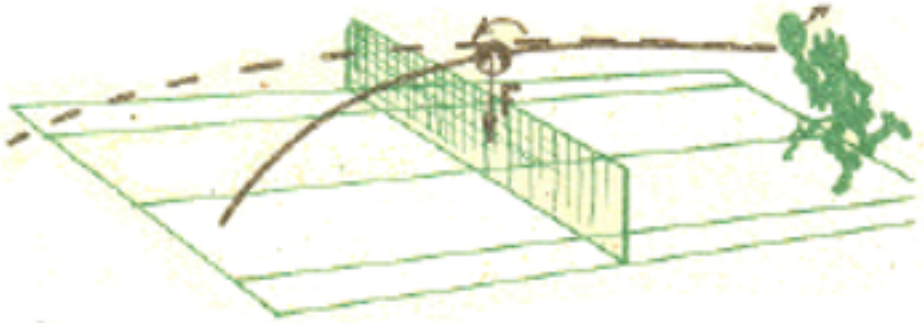


EFEKT MAGNUSA



EFEKT MAGNUSA


Magnus
Force





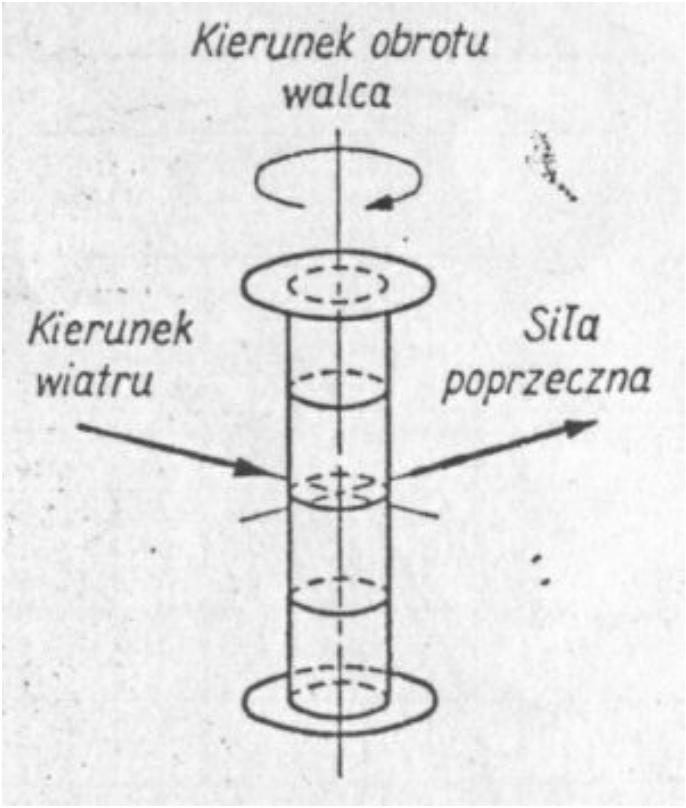
E-Ship 1 z wirnikami (2008)

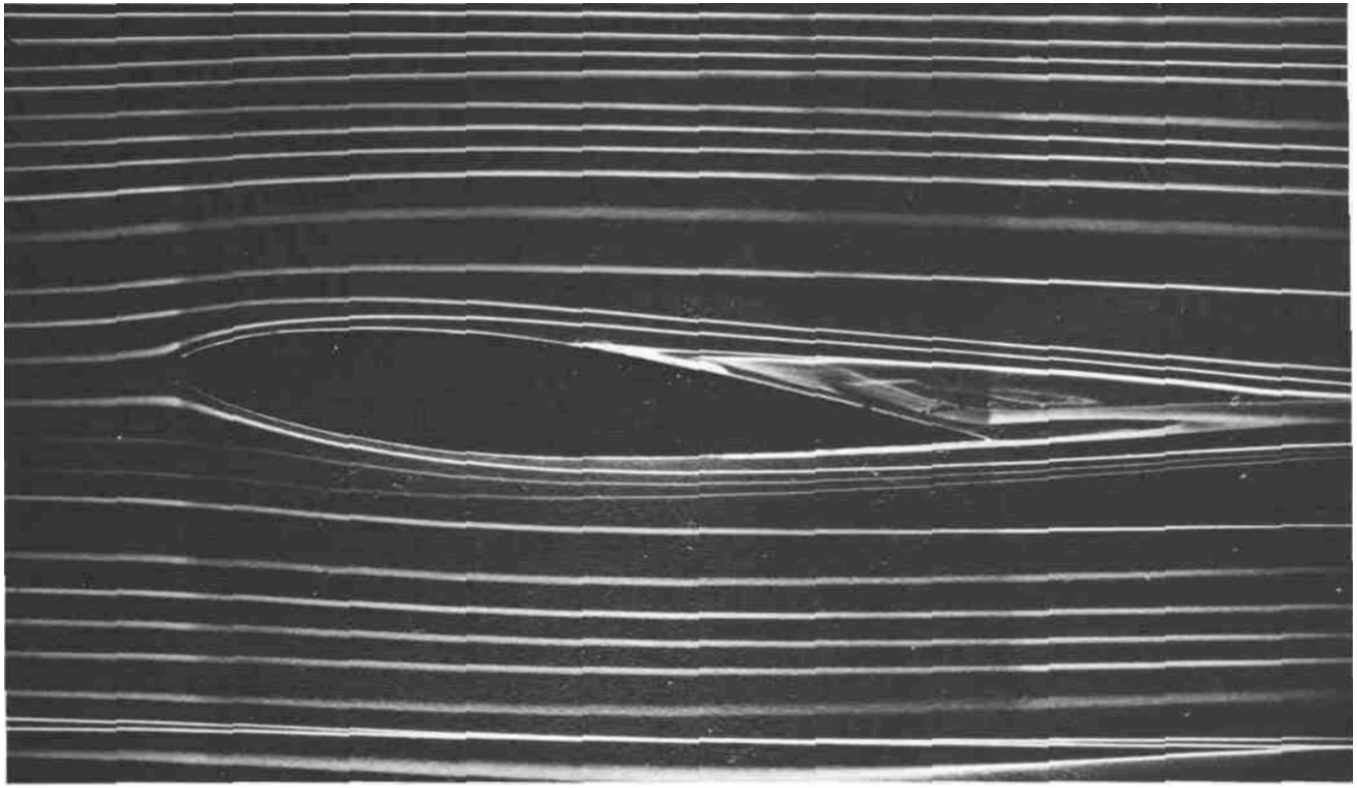


E-Ship 1

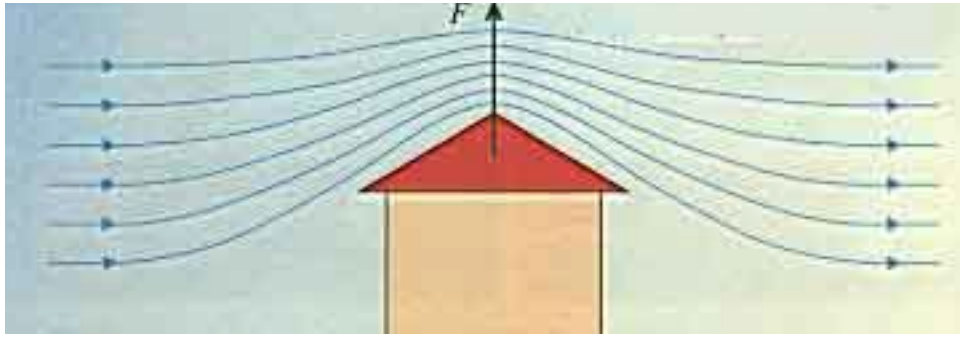


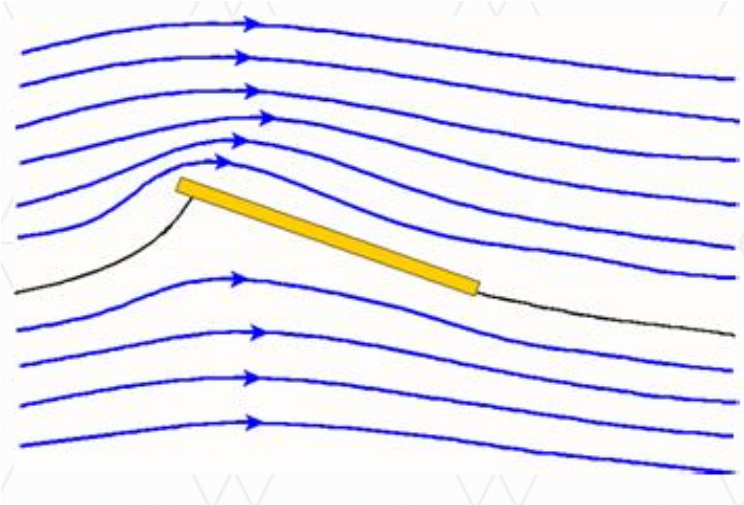
E-Ship 1

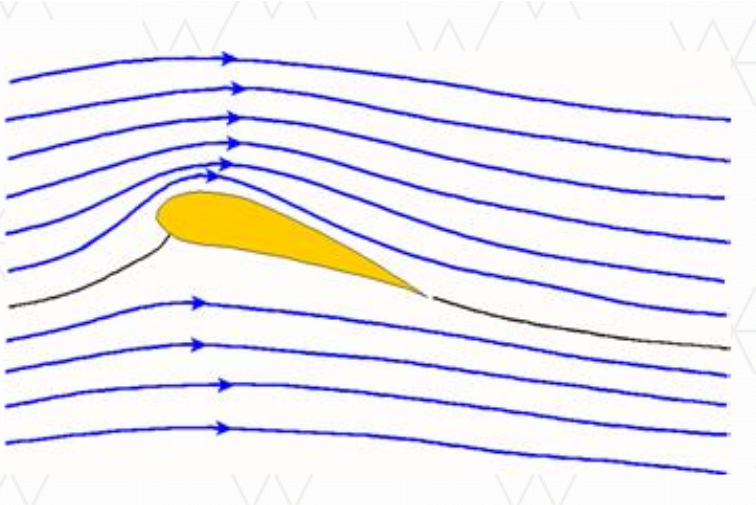


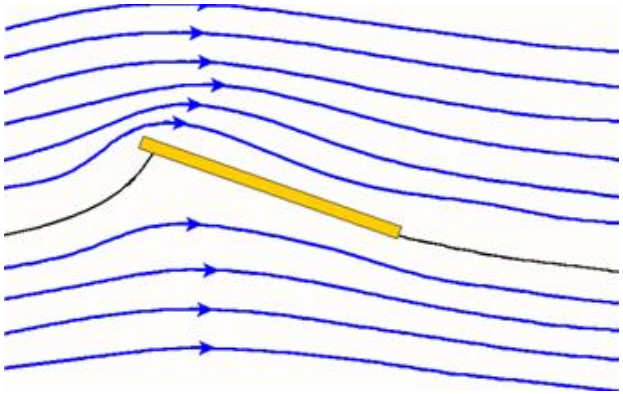


Oderwanie warstwy przyściennej na profilu NASA 64AO15
Opływ laminarny, α=5^{o}

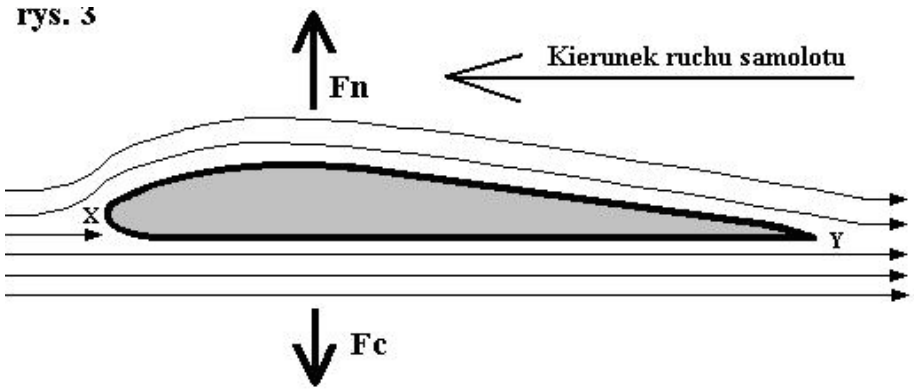


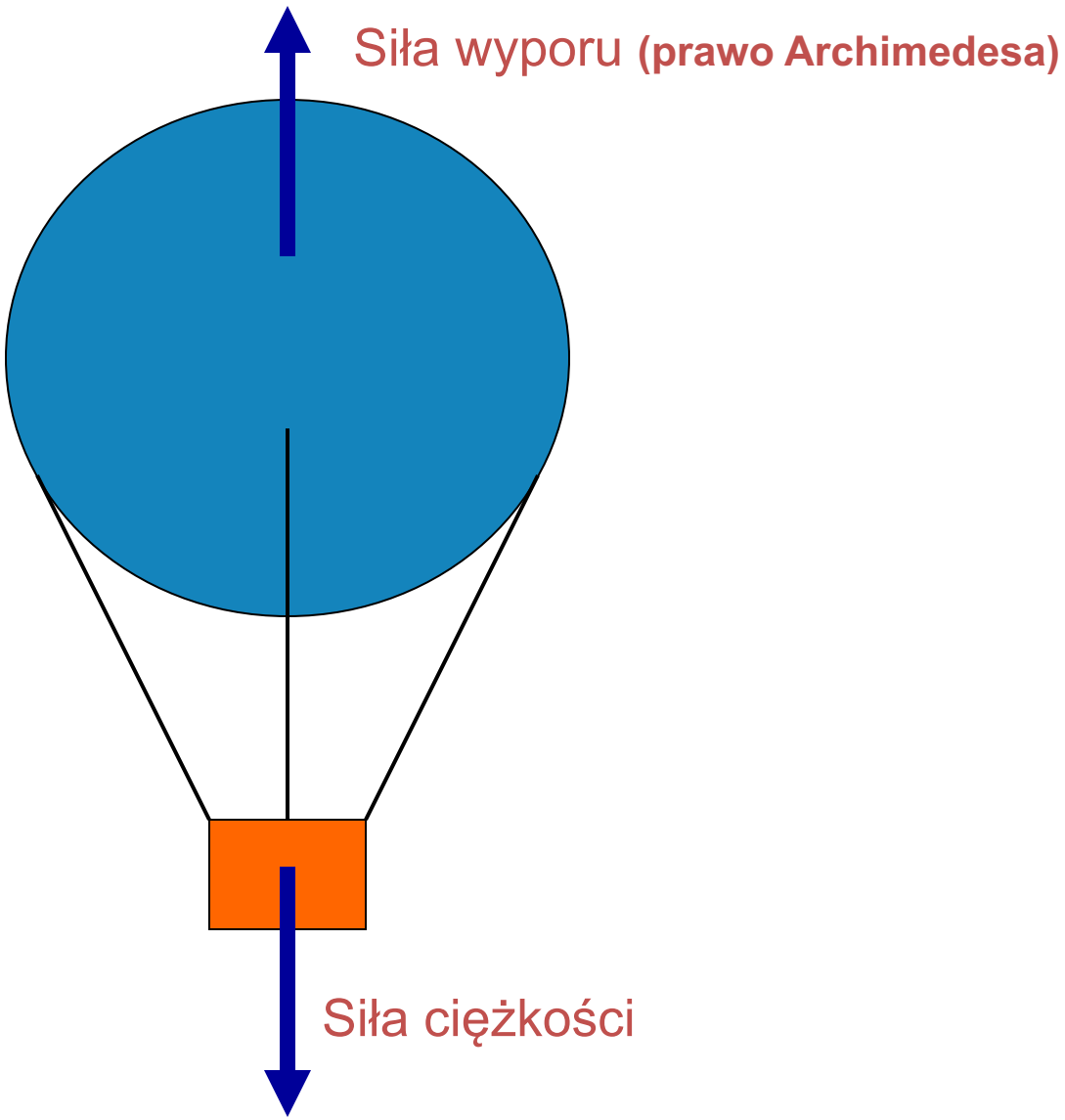


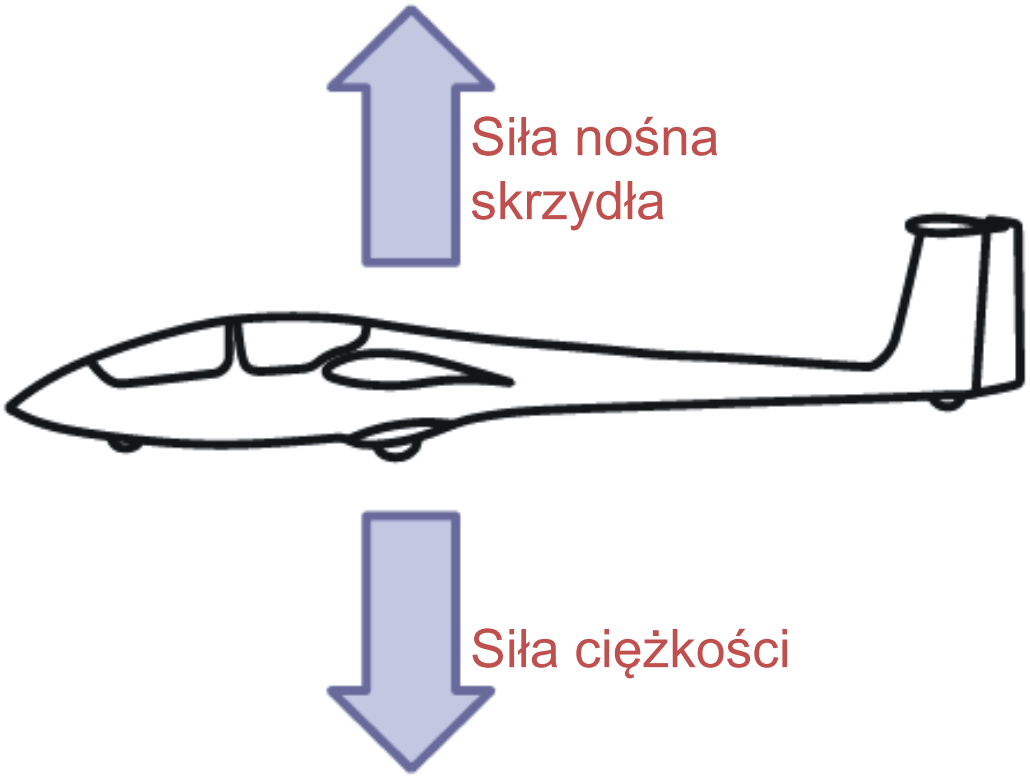


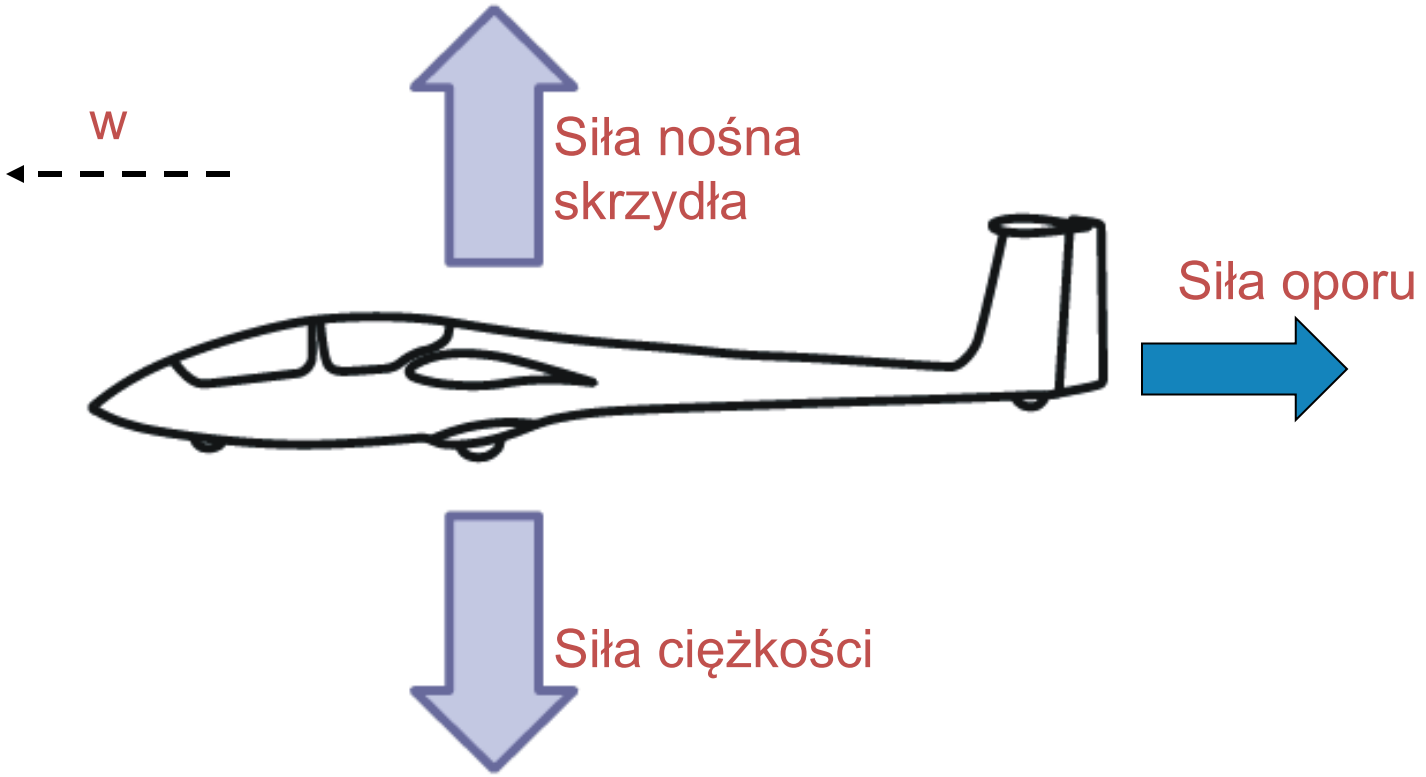


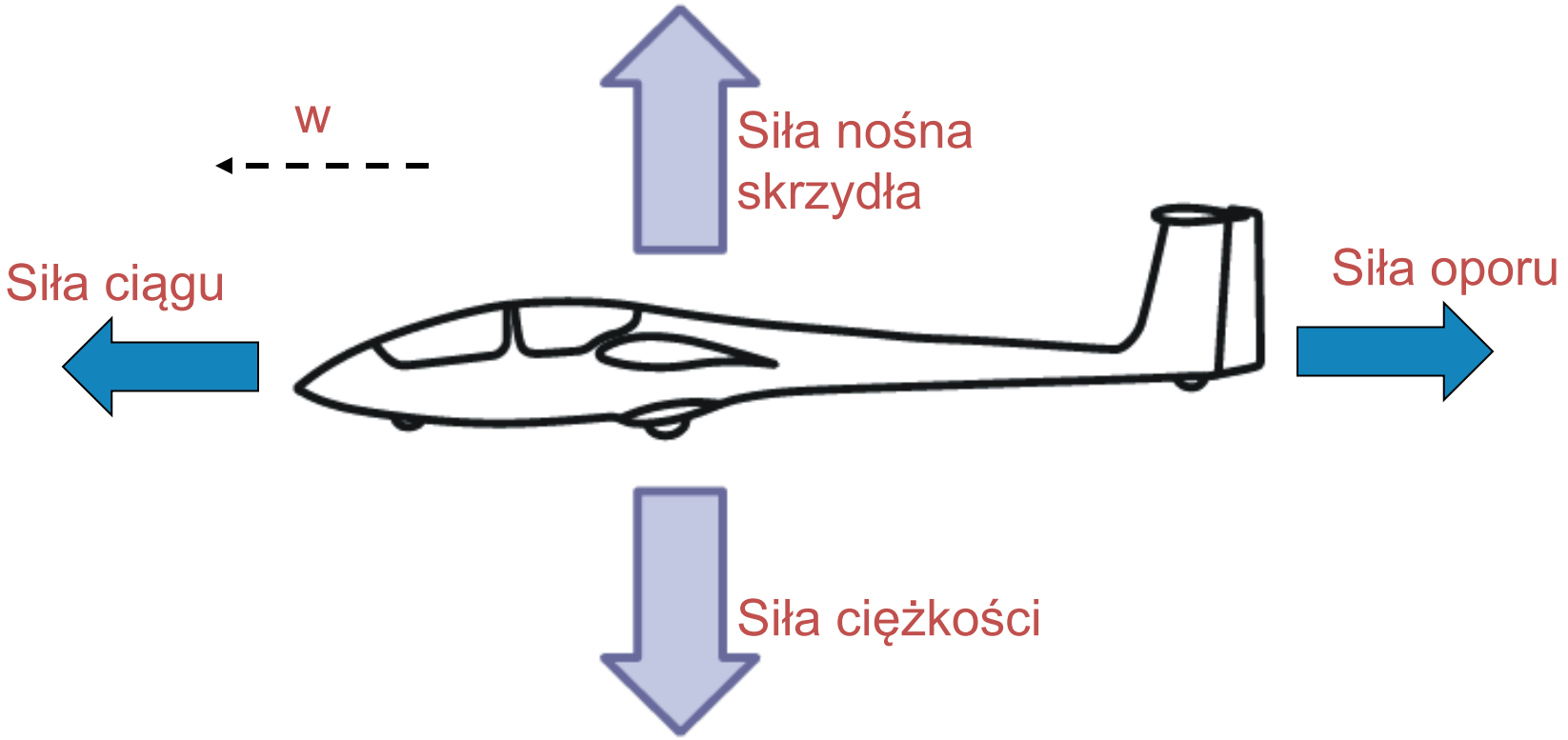
rys. 3

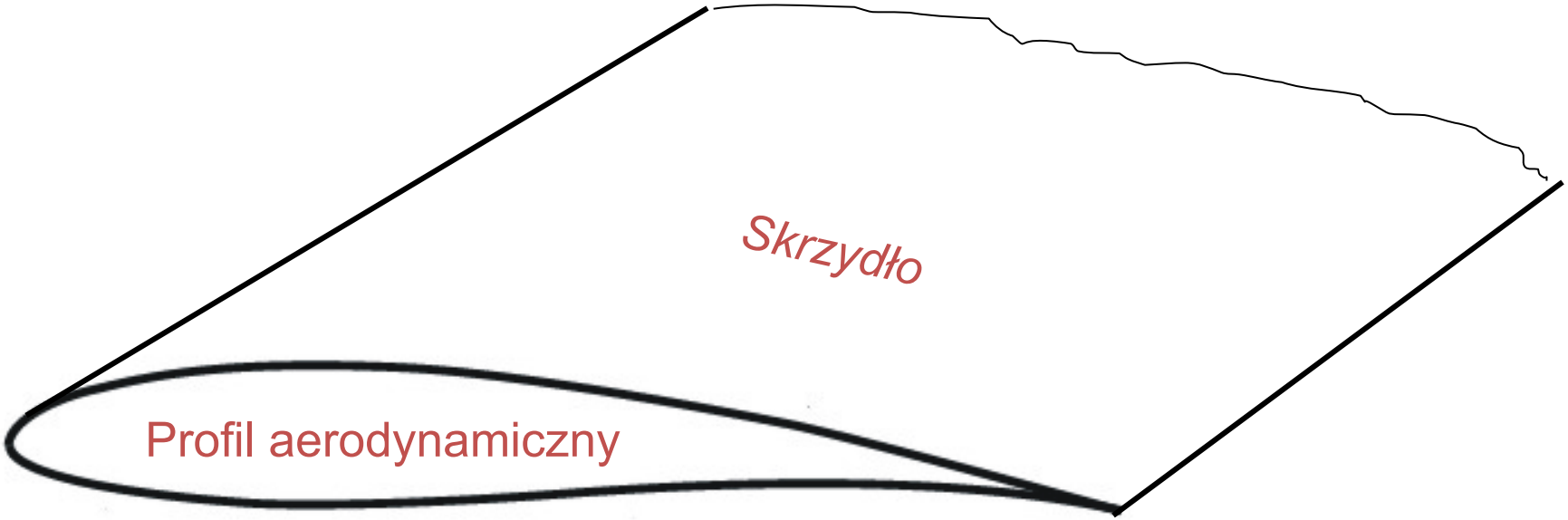


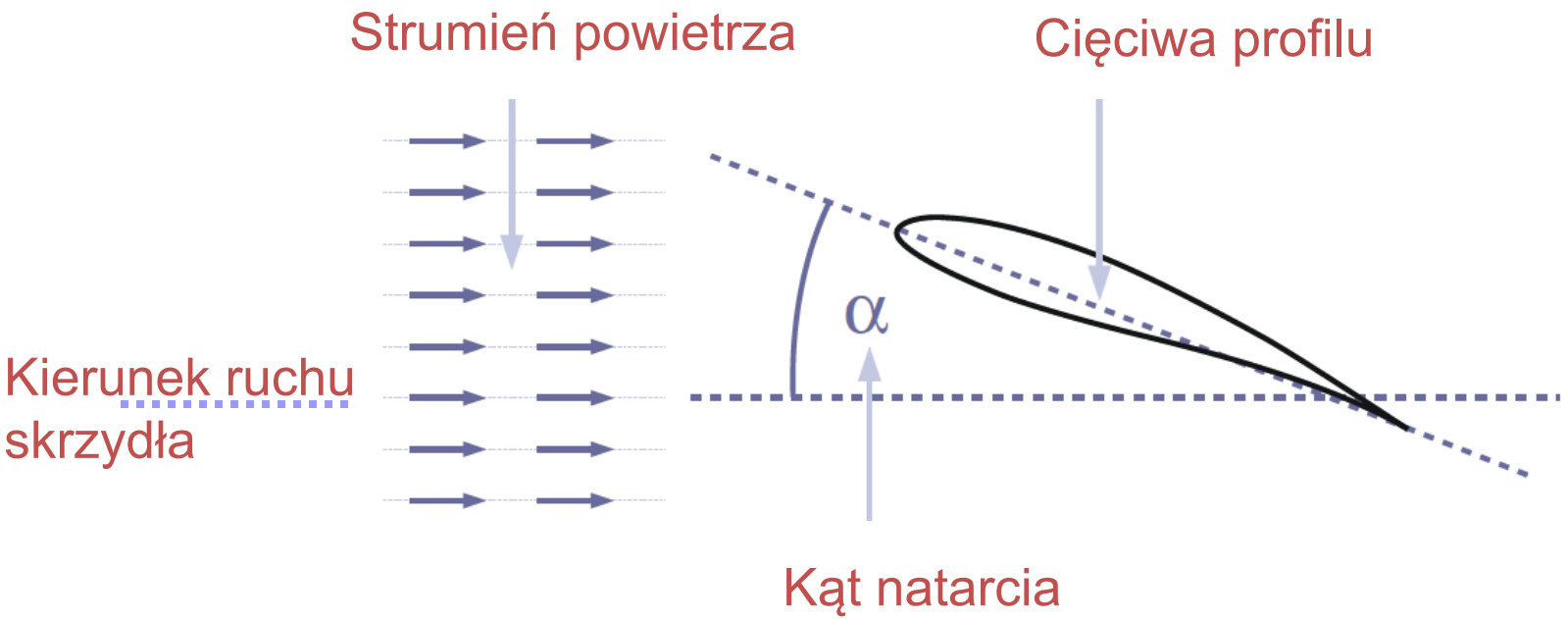

Siła wyporu (prawo Archimedesa)
Siła ciężkości

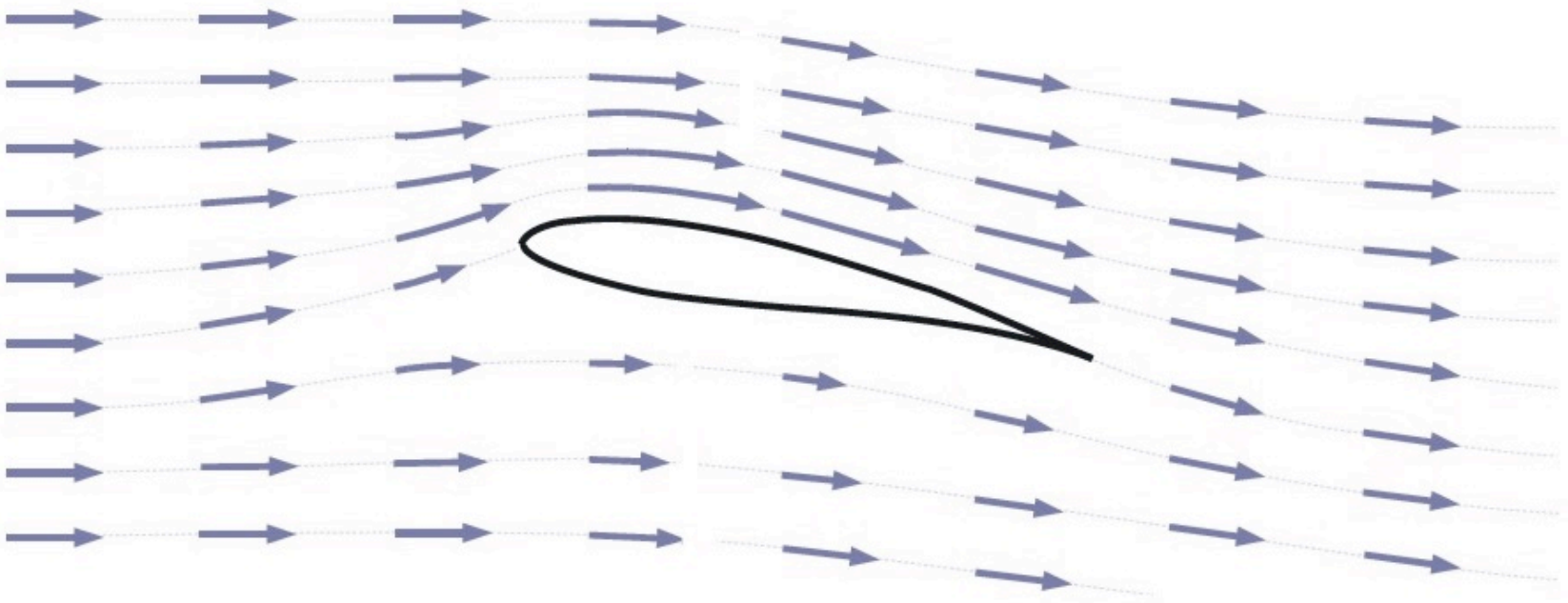

Siła nośna
skrzydła
Siła ciężkości

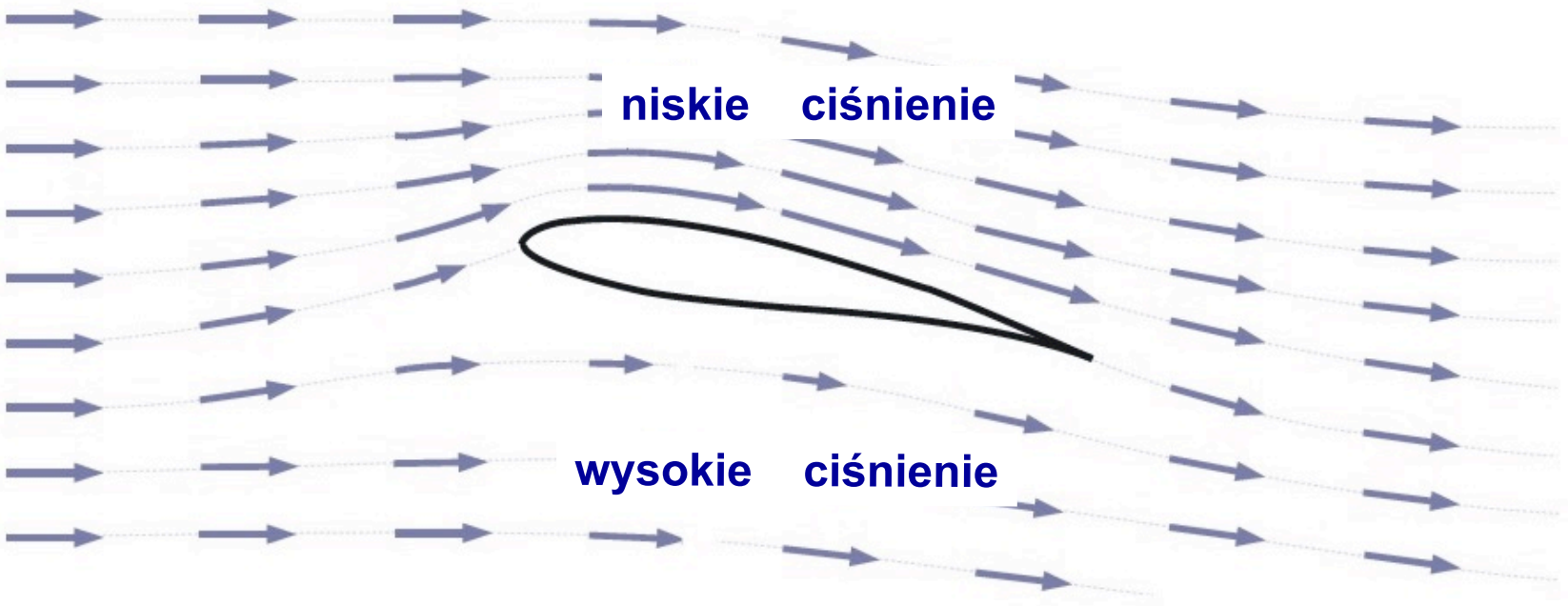

w
Siła nośna skrzydła
Siła oporu
Siła ciężkości

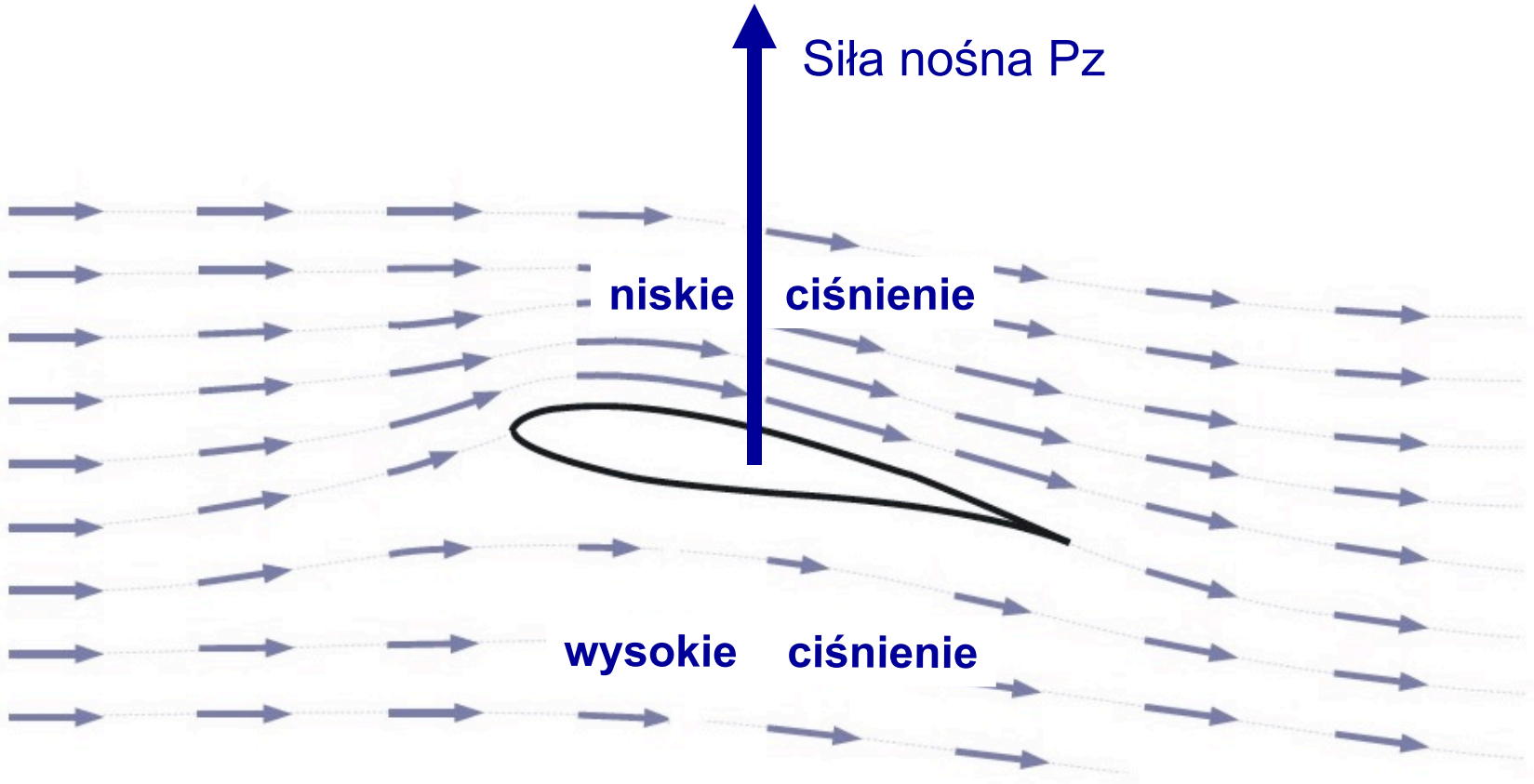

w
Siła nośna skrzydła
Siła ciągu
Siła oporu
Siła ciężkości

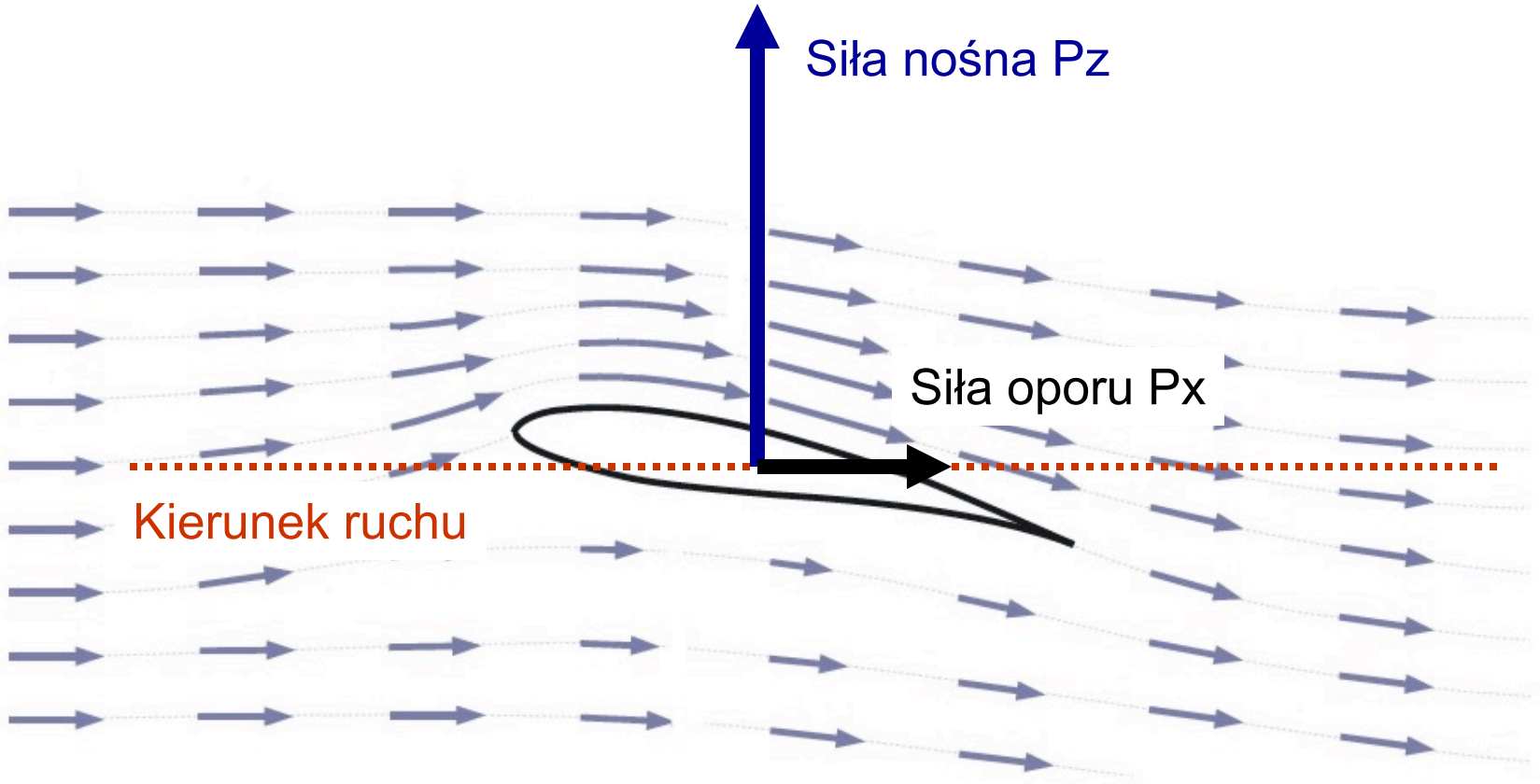

Skrzydło
Profil aerodynamiczny

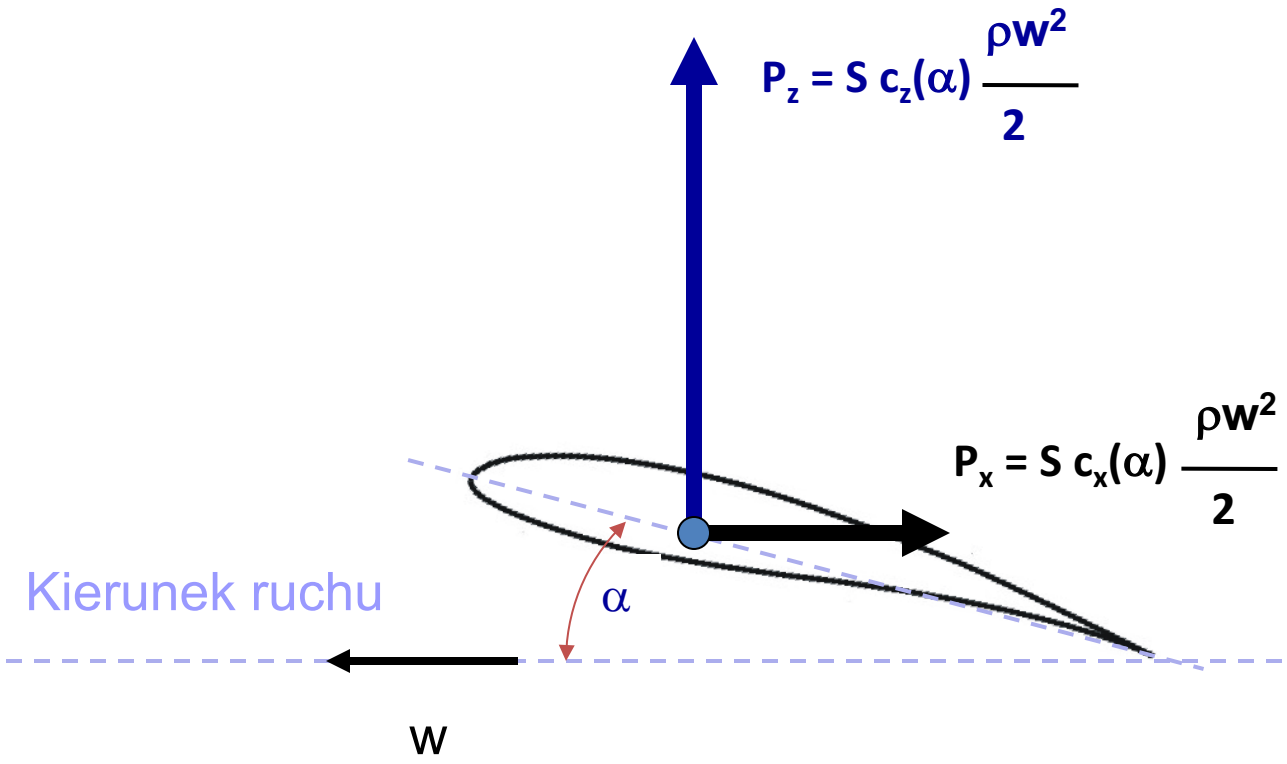

Strumień powietrza
Cięciwa profilu
Kierunek ruchu skrzydła
α
Kąt natarcia




niskie ciśnienie
wysokie ciśnienie

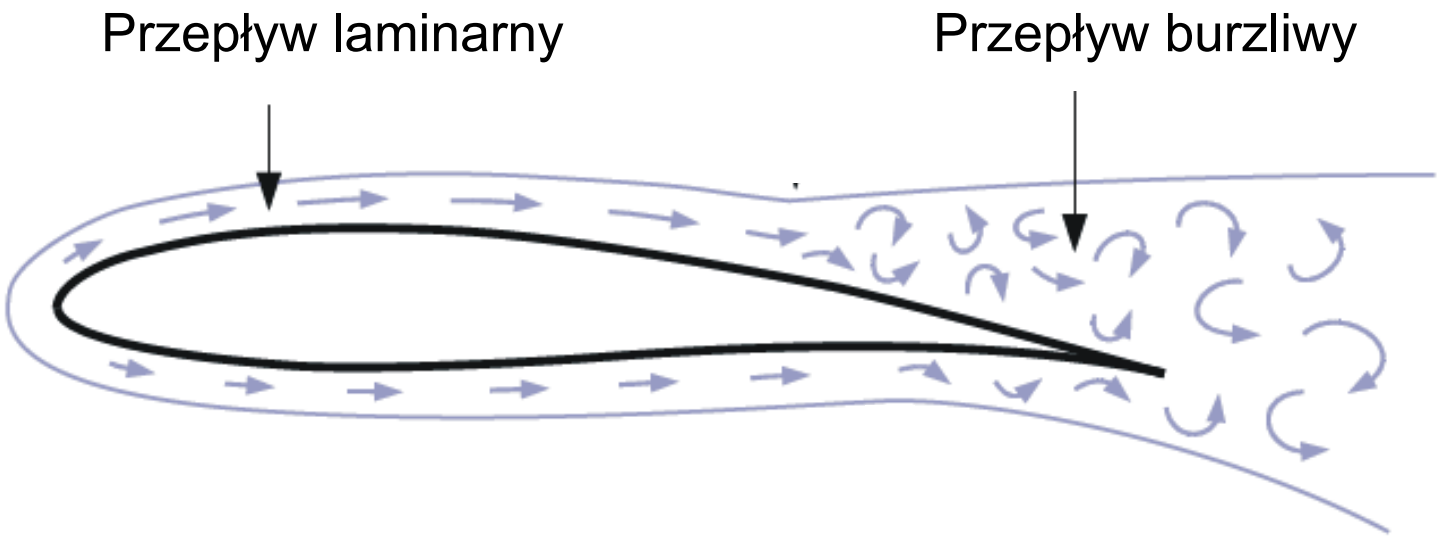

Siła nośna Pz
niskie ciśnienie
wysokie ciśnienie

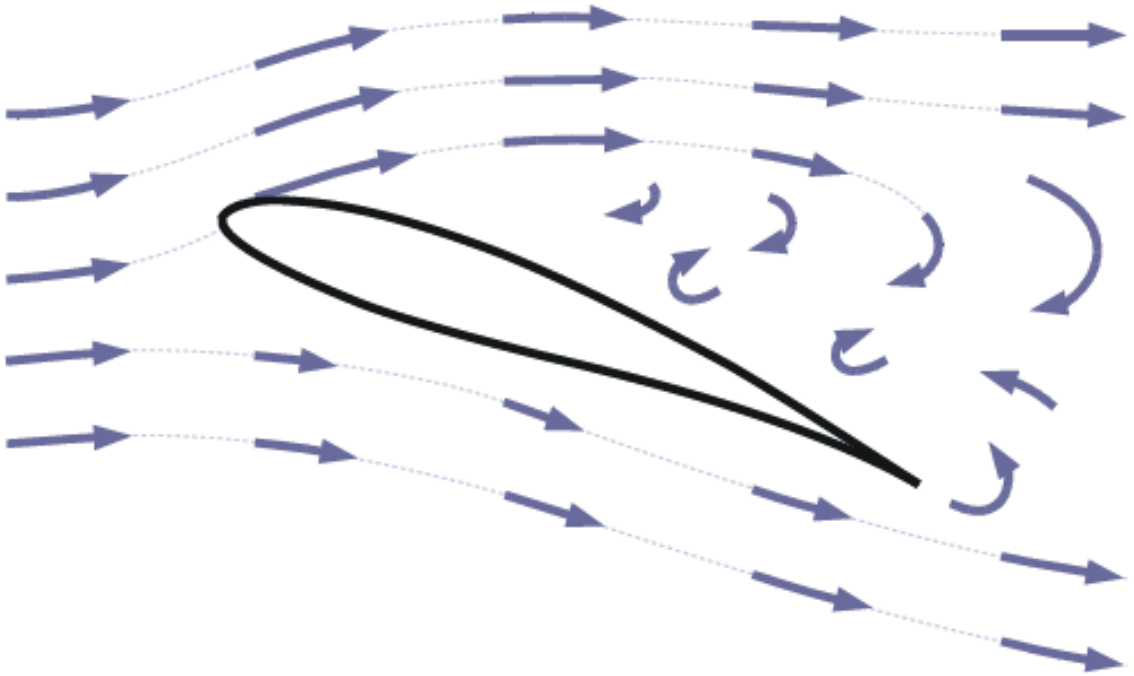

Siła nośna Pz
Siła oporu Px
Kierunek ruchu



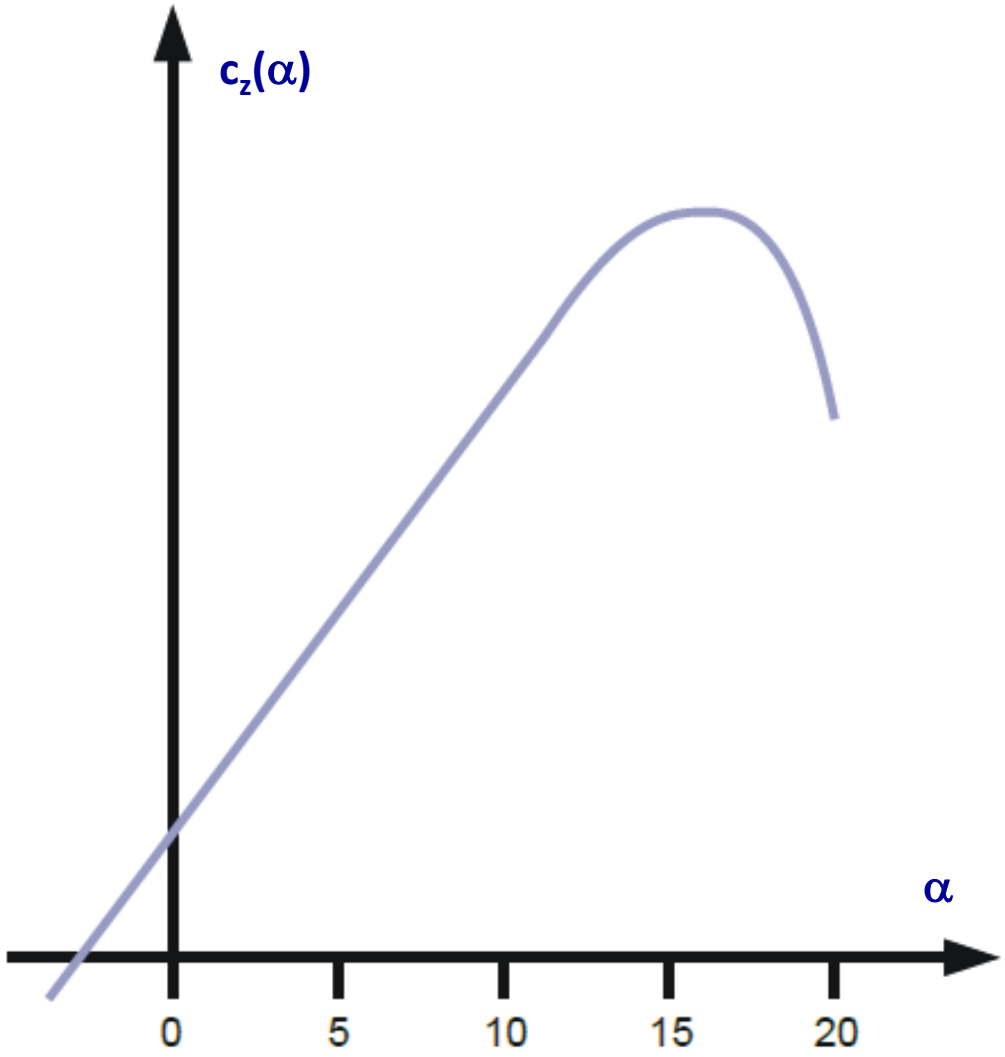
● Środek wyporu

S - Powierzchnia skrzydła

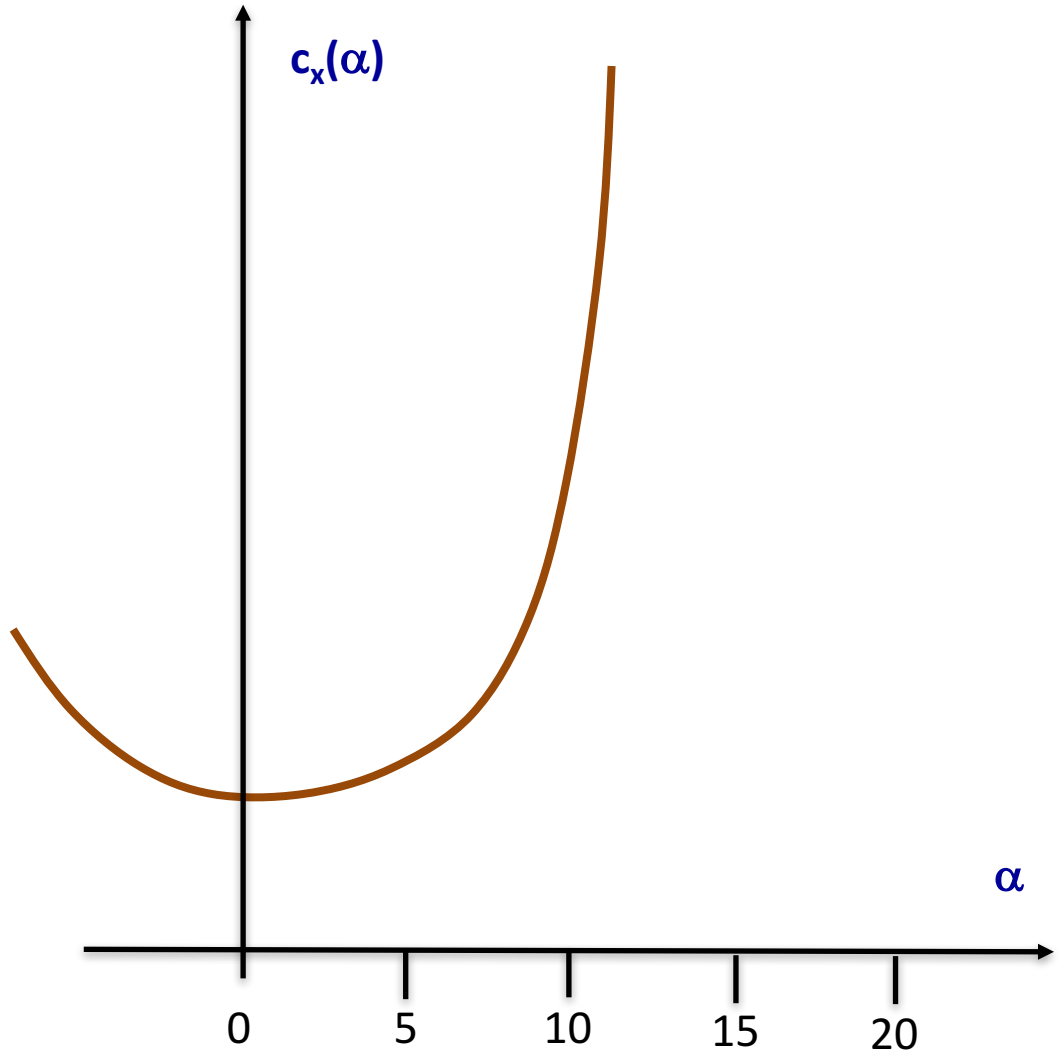

Przepływ laminarny
Przepływ burzliwy



$$P_z = S\, c_z(\alpha)\, \frac{\rho w^2}{2}$$

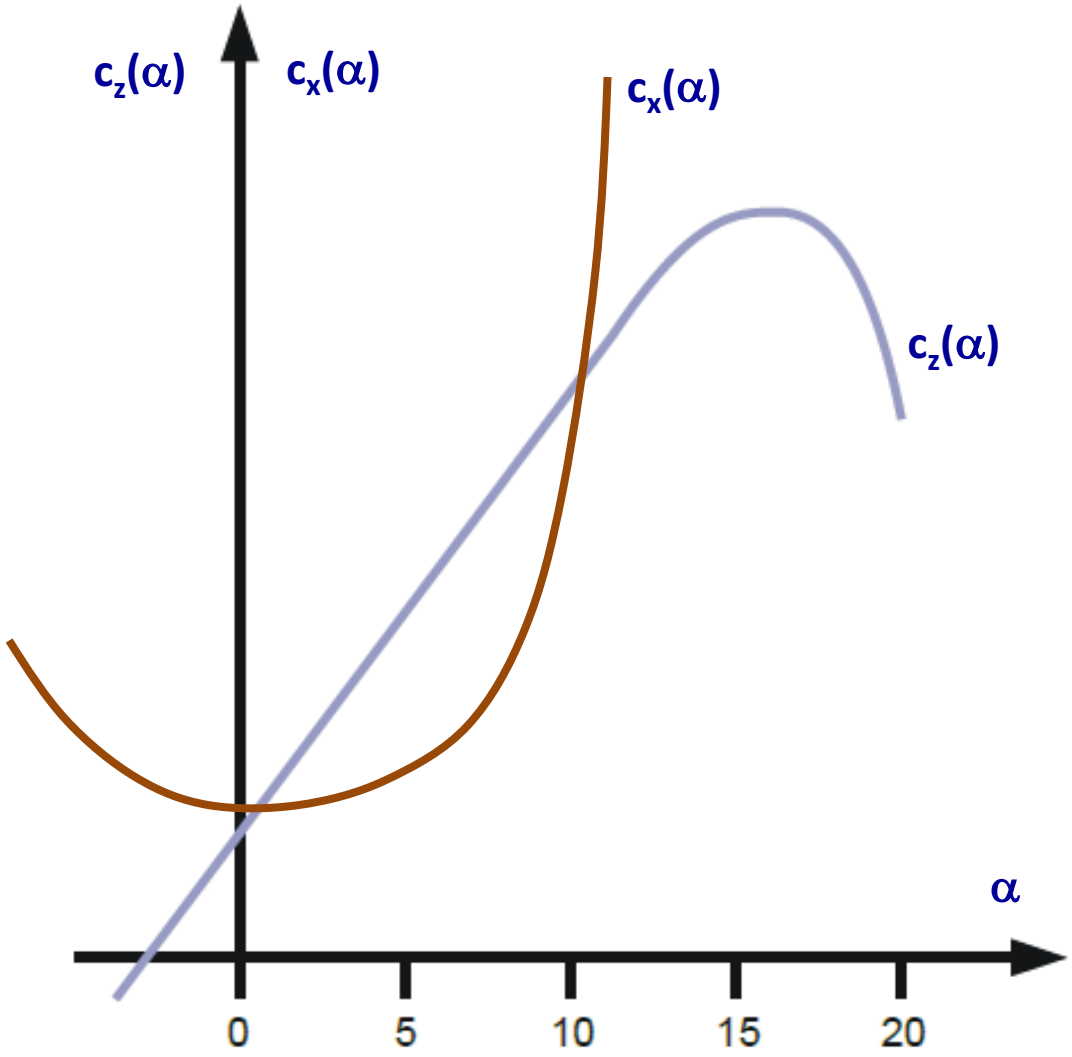


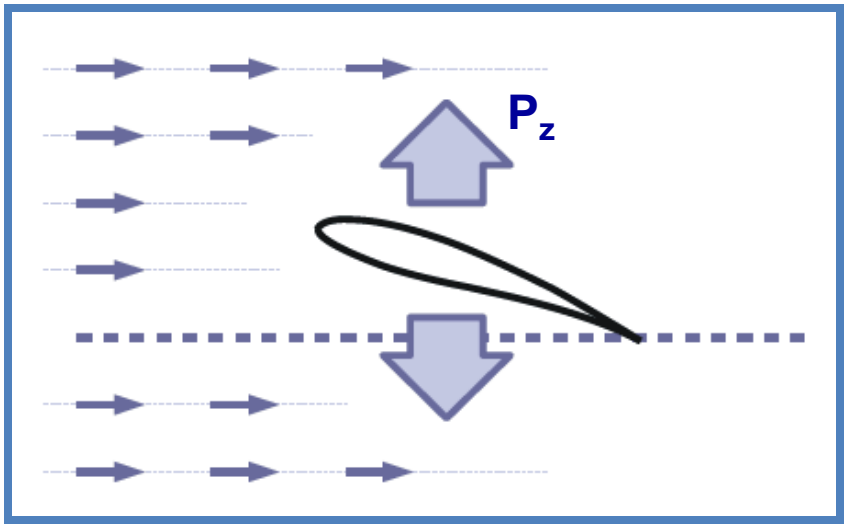
$$P_x = S\, c_x(\alpha) \frac{\rho w^2}{2}$$

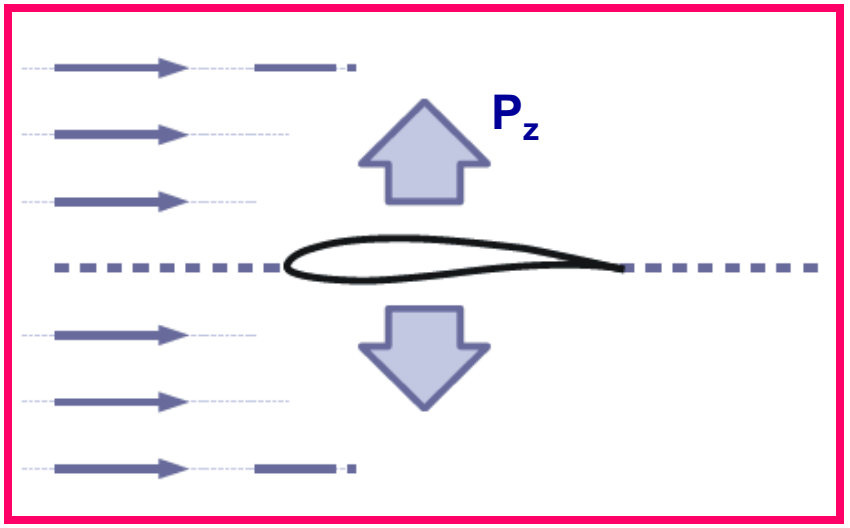


$$P_z = S\, c_z(\alpha) \frac{\rho w^2}{2}$$

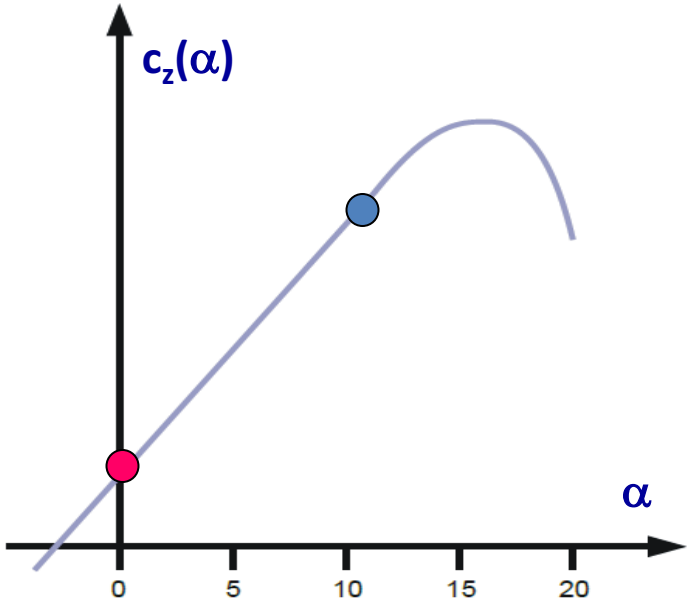
$$P_x = S\, c_x(\alpha) \frac{\rho w^2}{2}$$

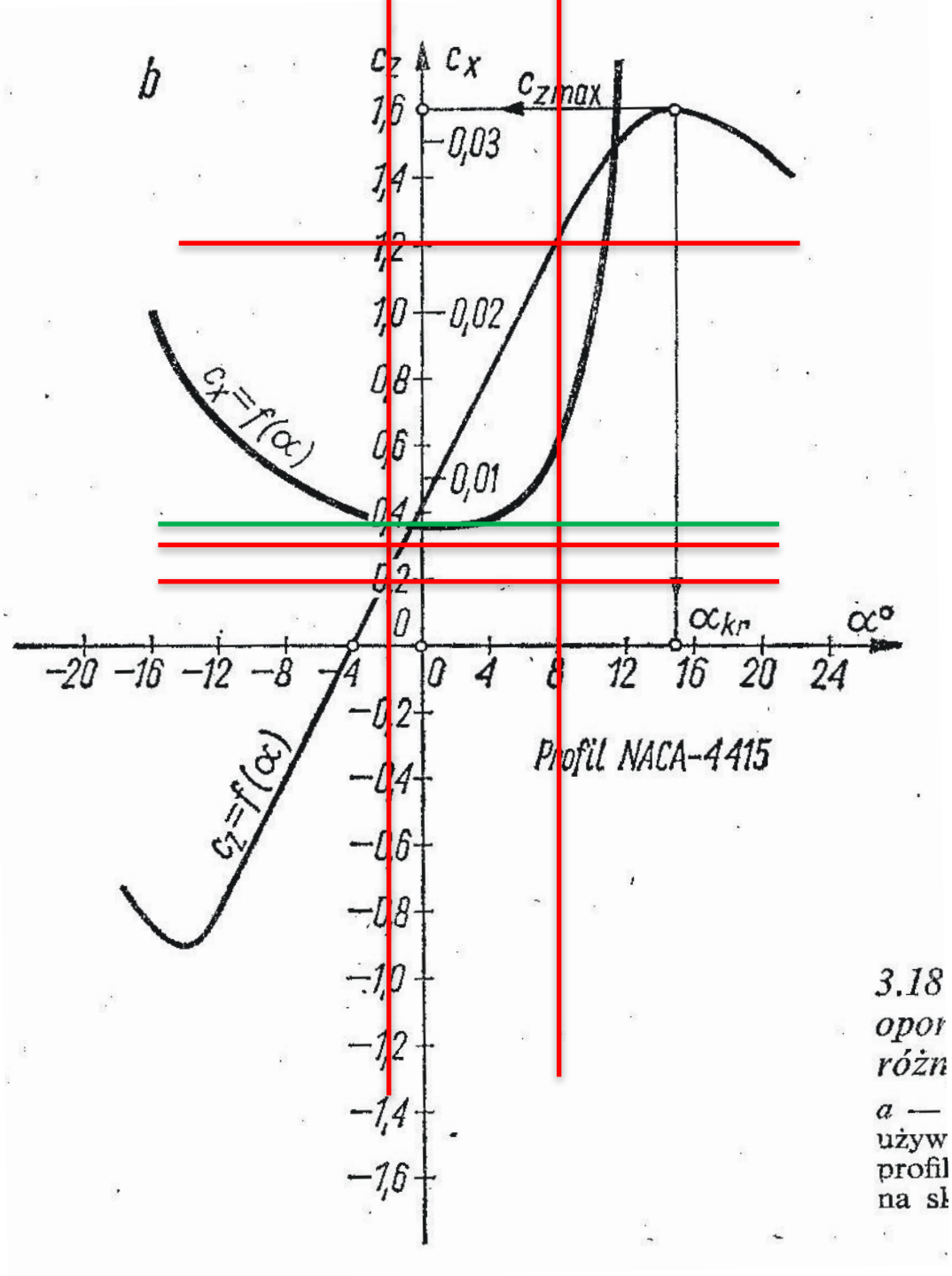






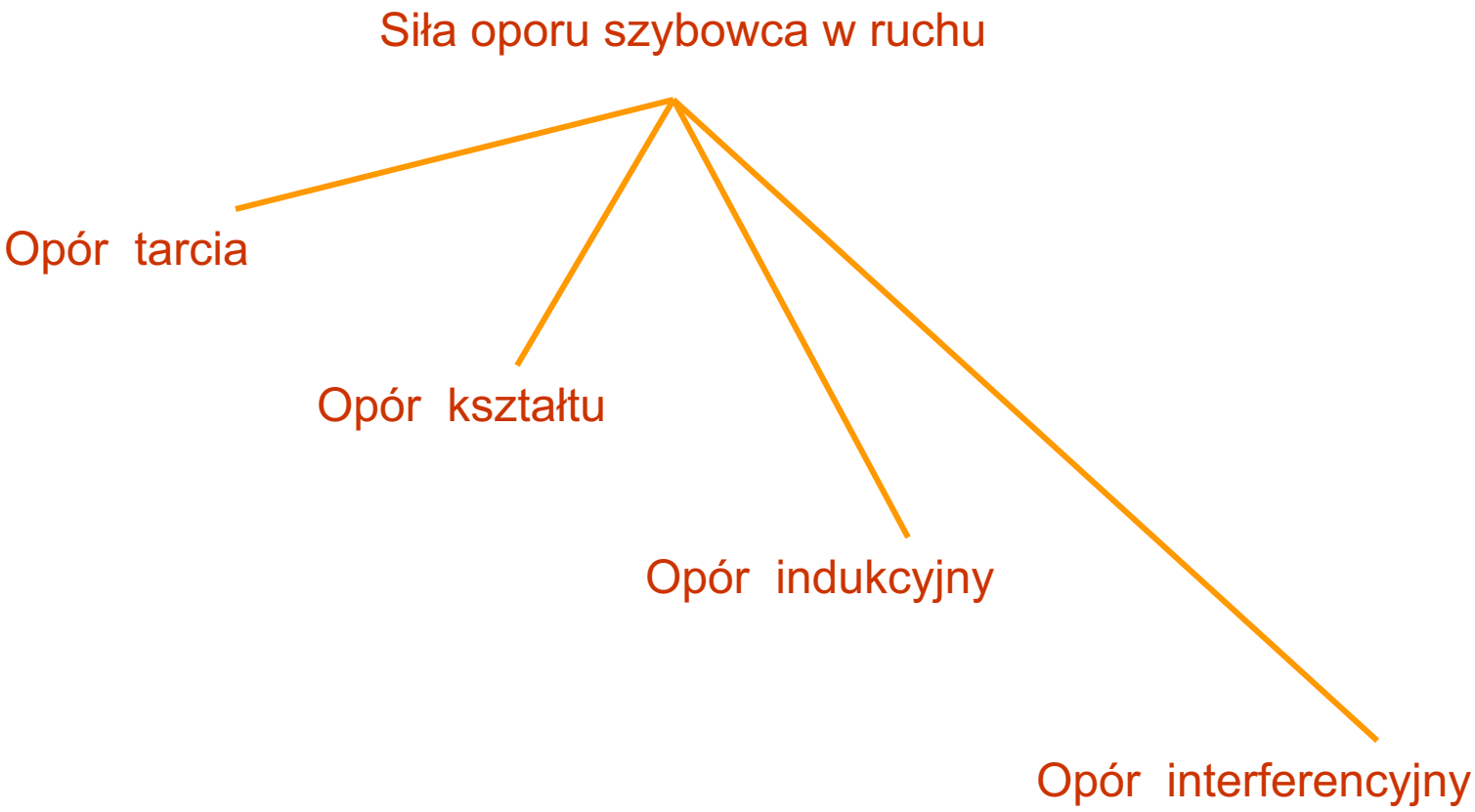
$$P_z = S\, c_z(\alpha)\, \frac{\rho w^2}{2}$$



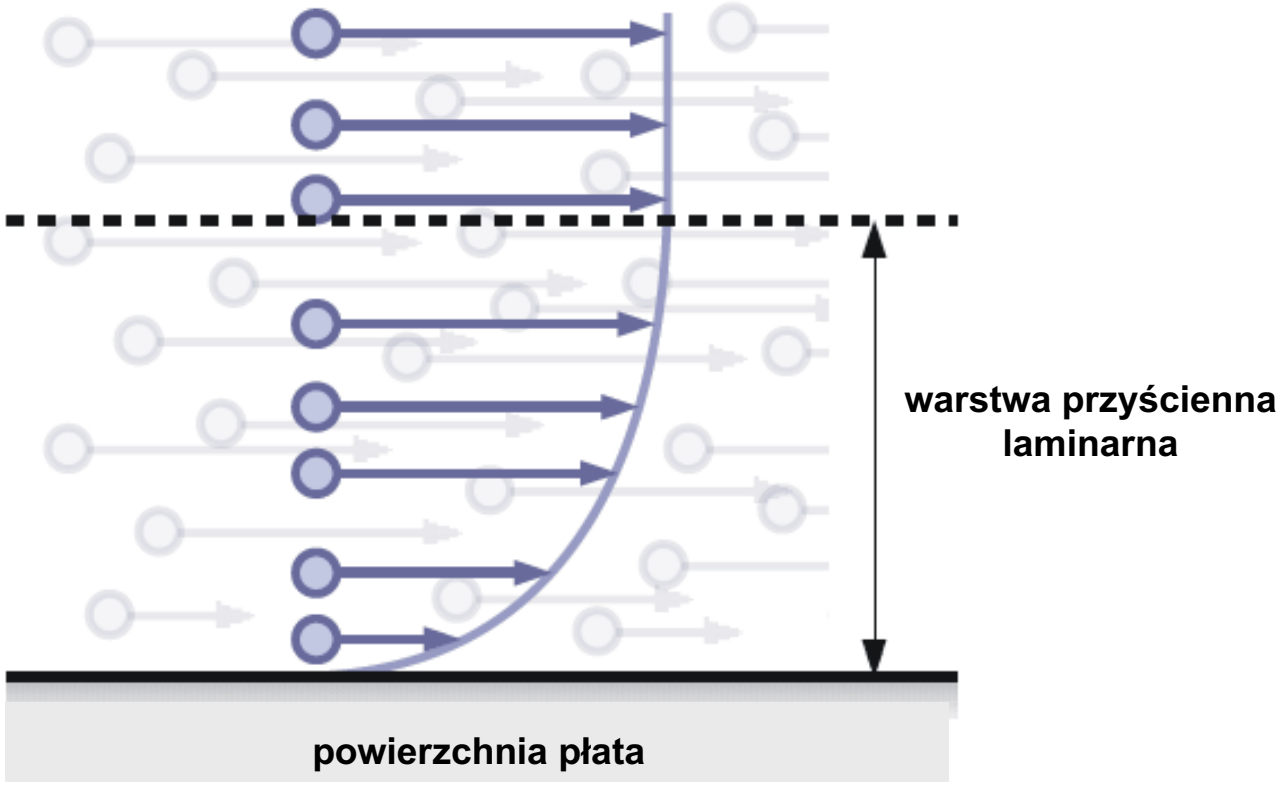


3.18
opor
różn

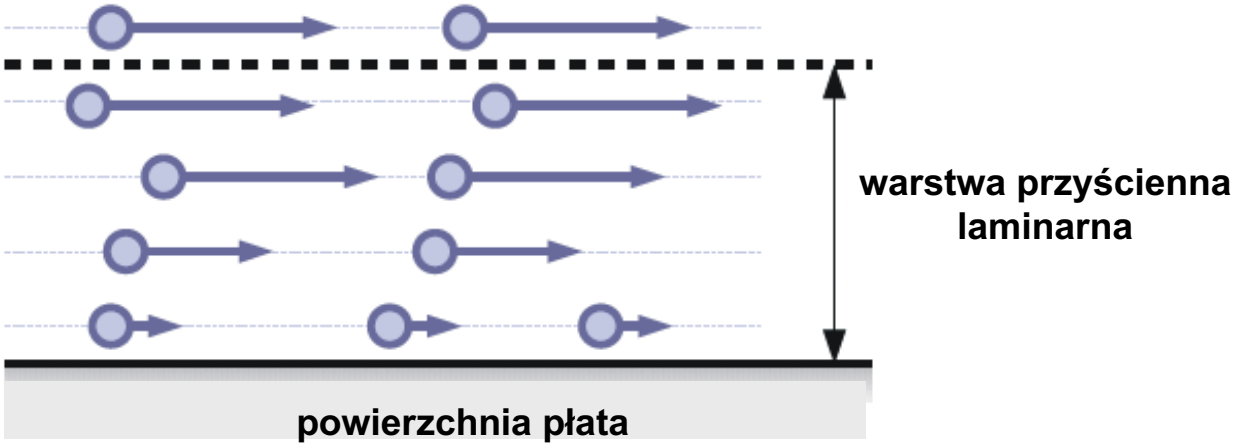
a —
używ
profil
na sk

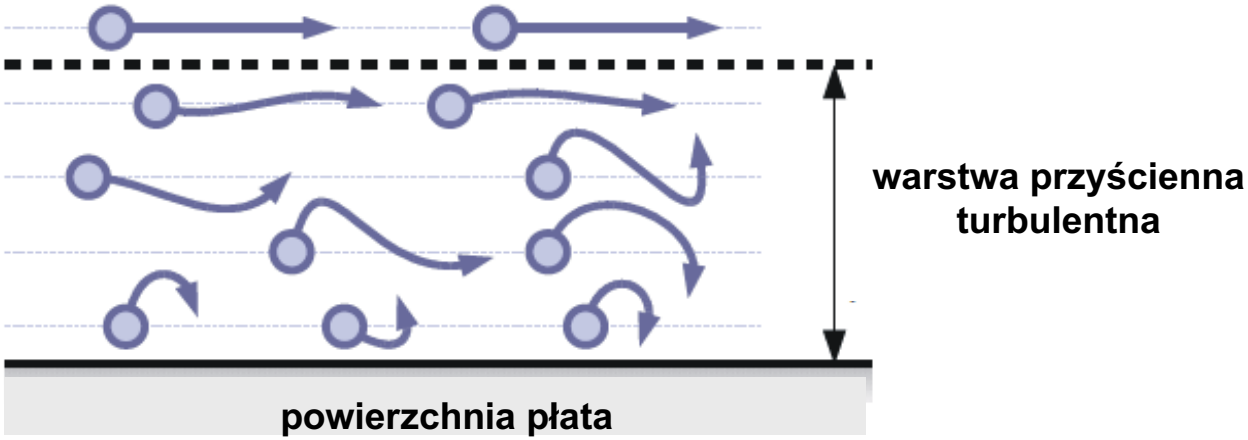

Siła oporu szybowca w ruchu
Opór tarcia
Opór kształtu
Opór indukcyjny
Opór interferencyjny

OPÓR TARCIA

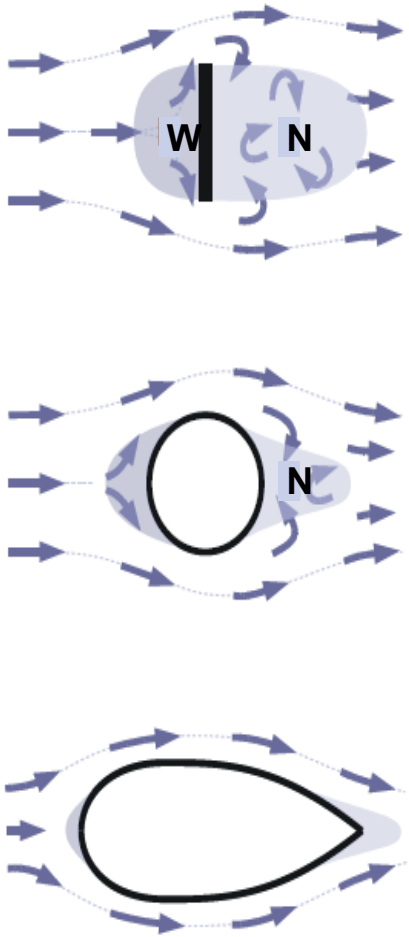


OPÓR TARCIA

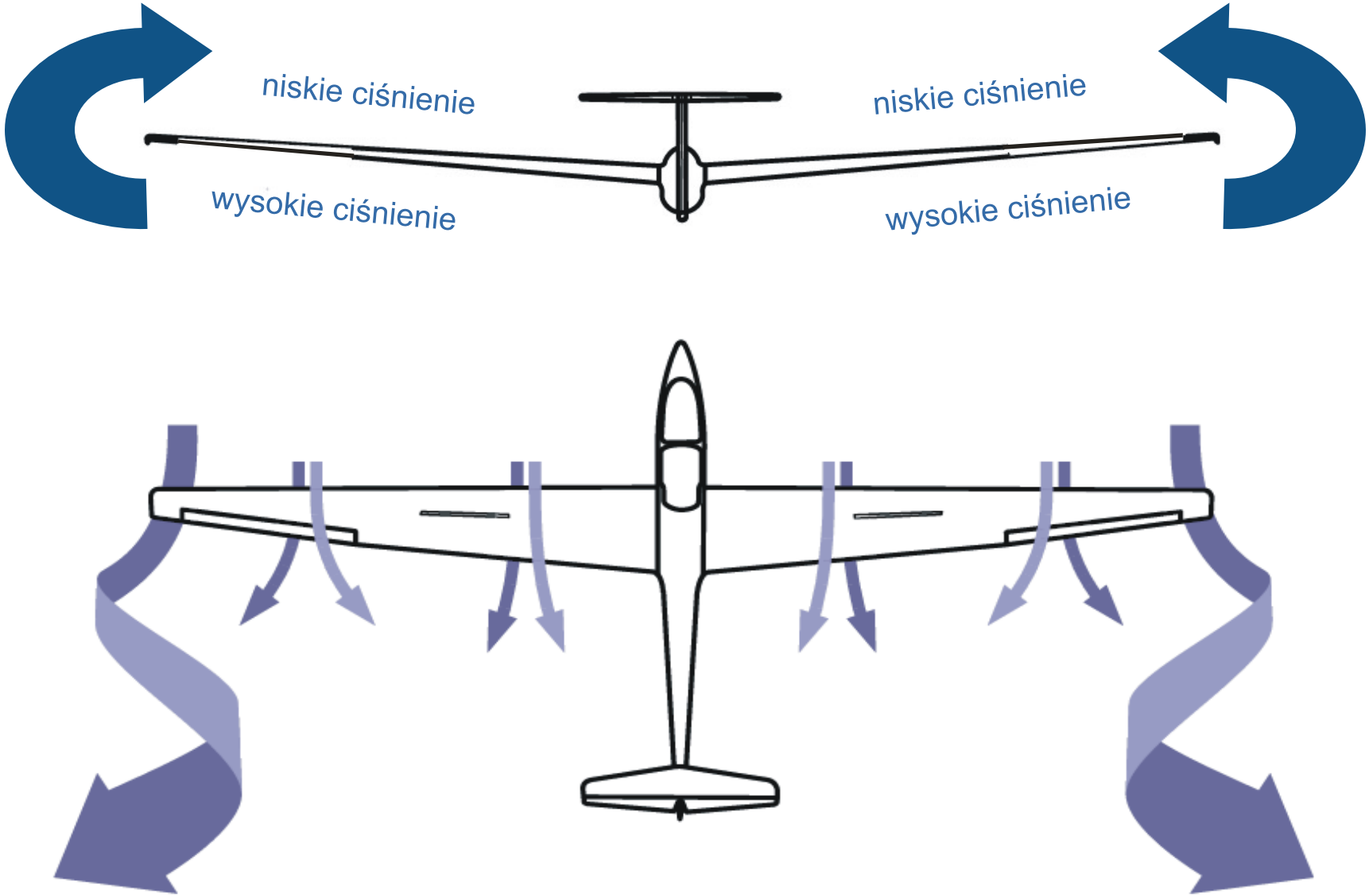

warstwa przyścienna
laminarna
powierzchnia płata


warstwa przyścienna
turbulentna
powierzchnia płata

OPÓR KSZTAŁTU



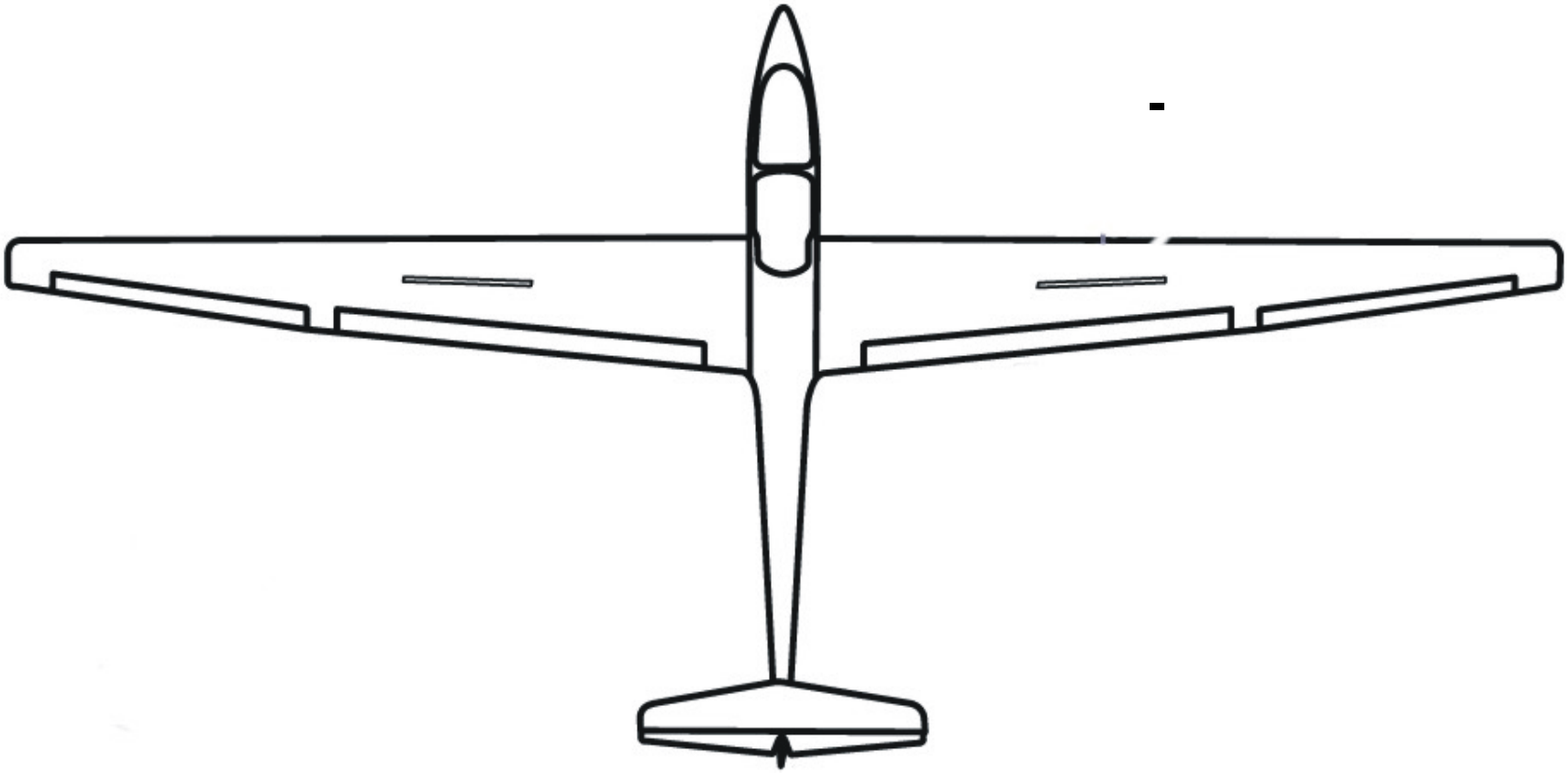
OPÓR INDUKCYJNY

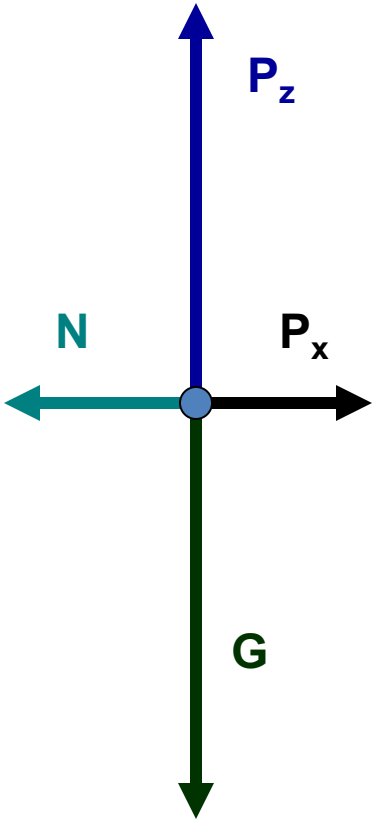


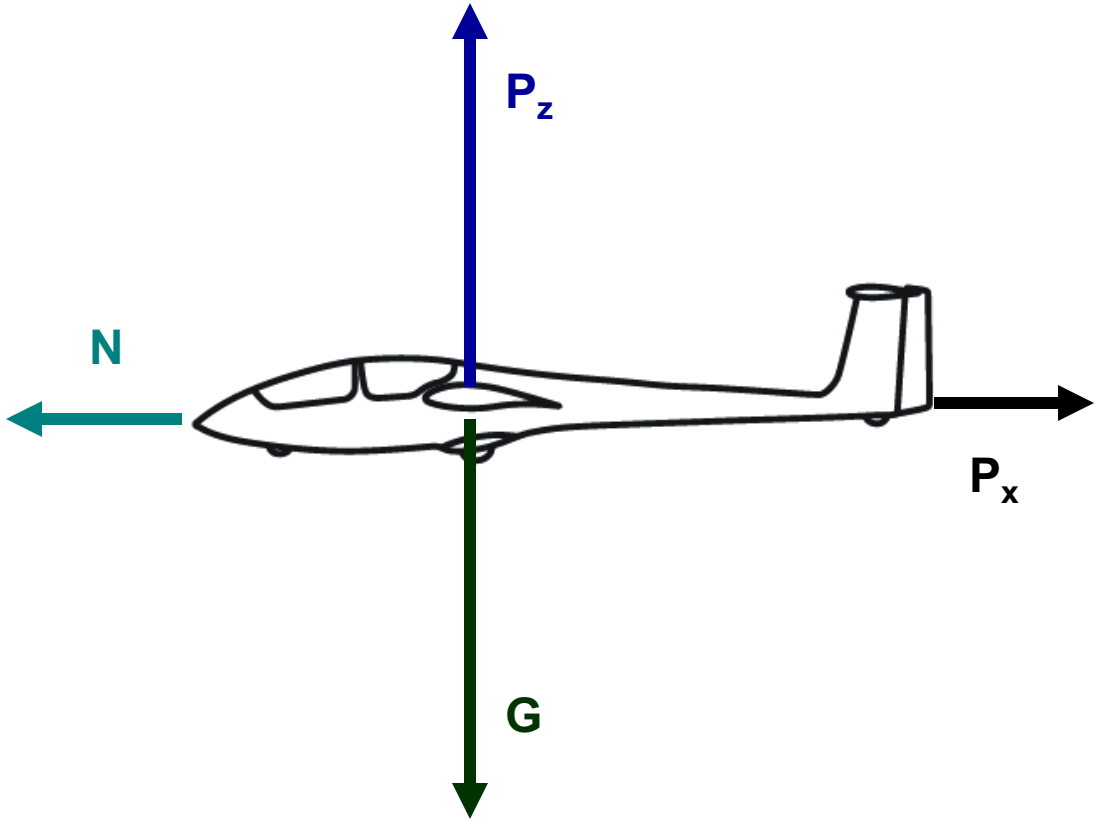


OPÓR INTERFERENCYJNY

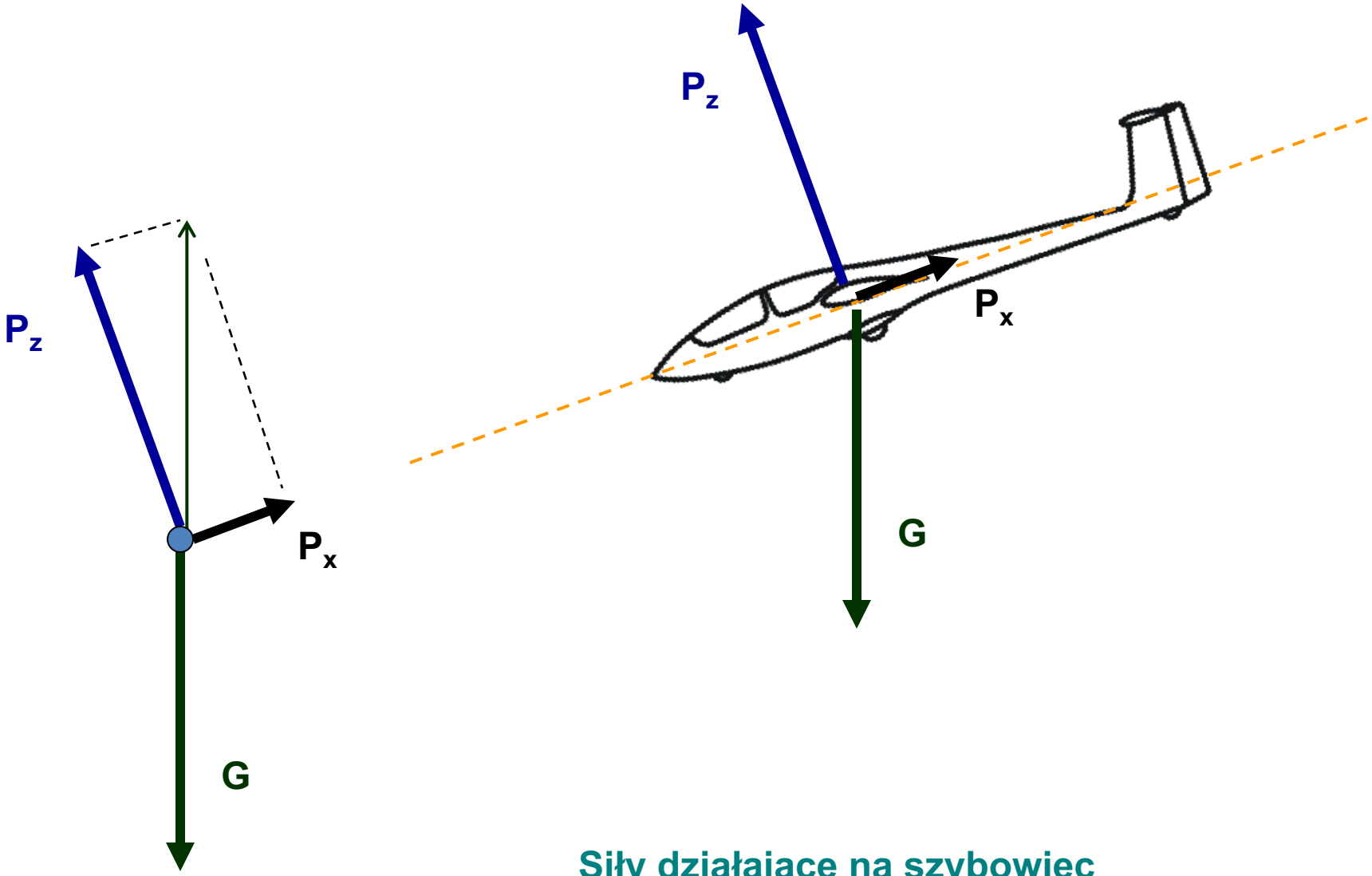
OPÓR CAŁKOWITY > Opór skrzydeł + Opór kadłuba + Opór usterzenia
(różnica jest oporem interferencyjnym)



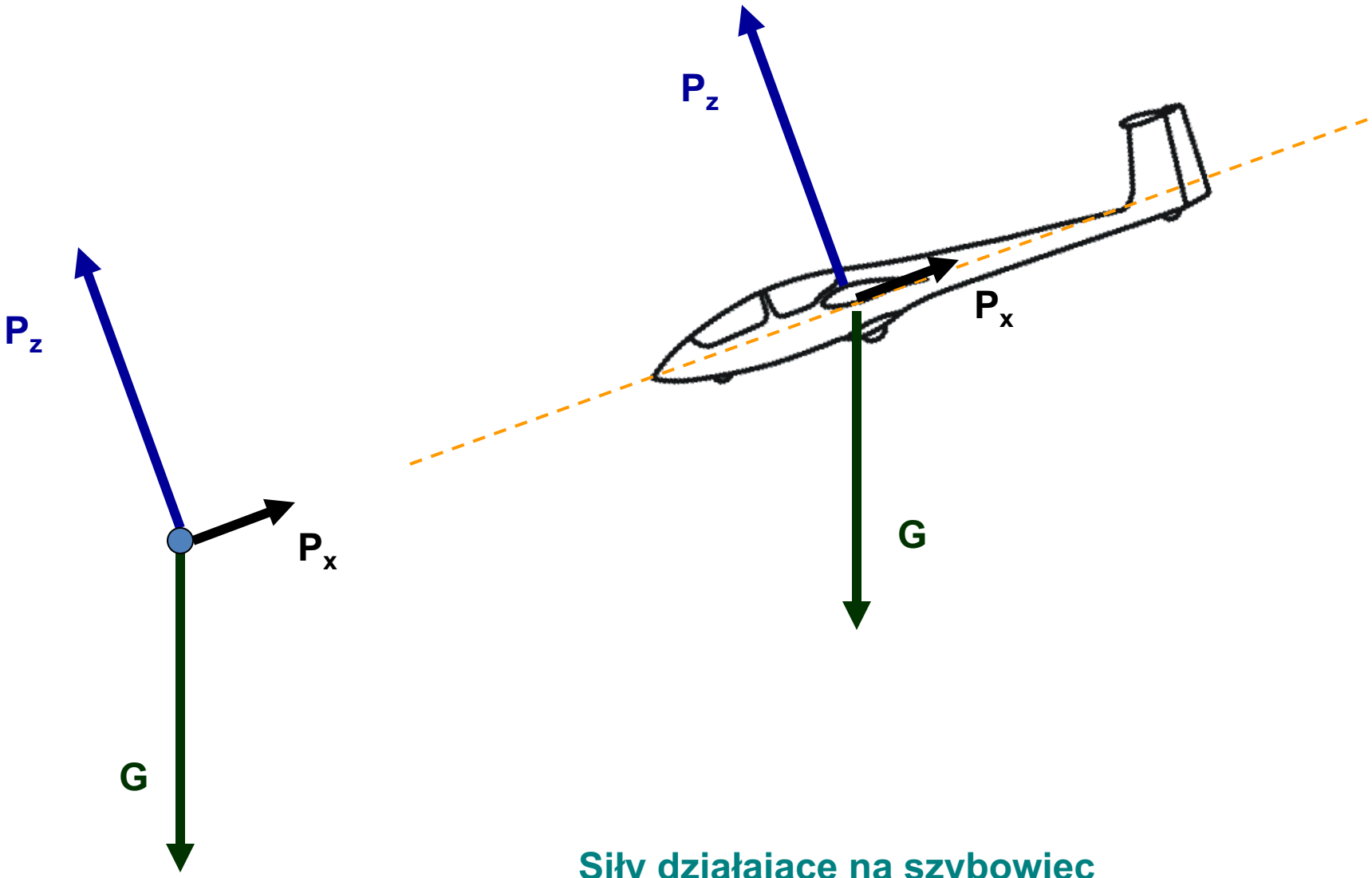




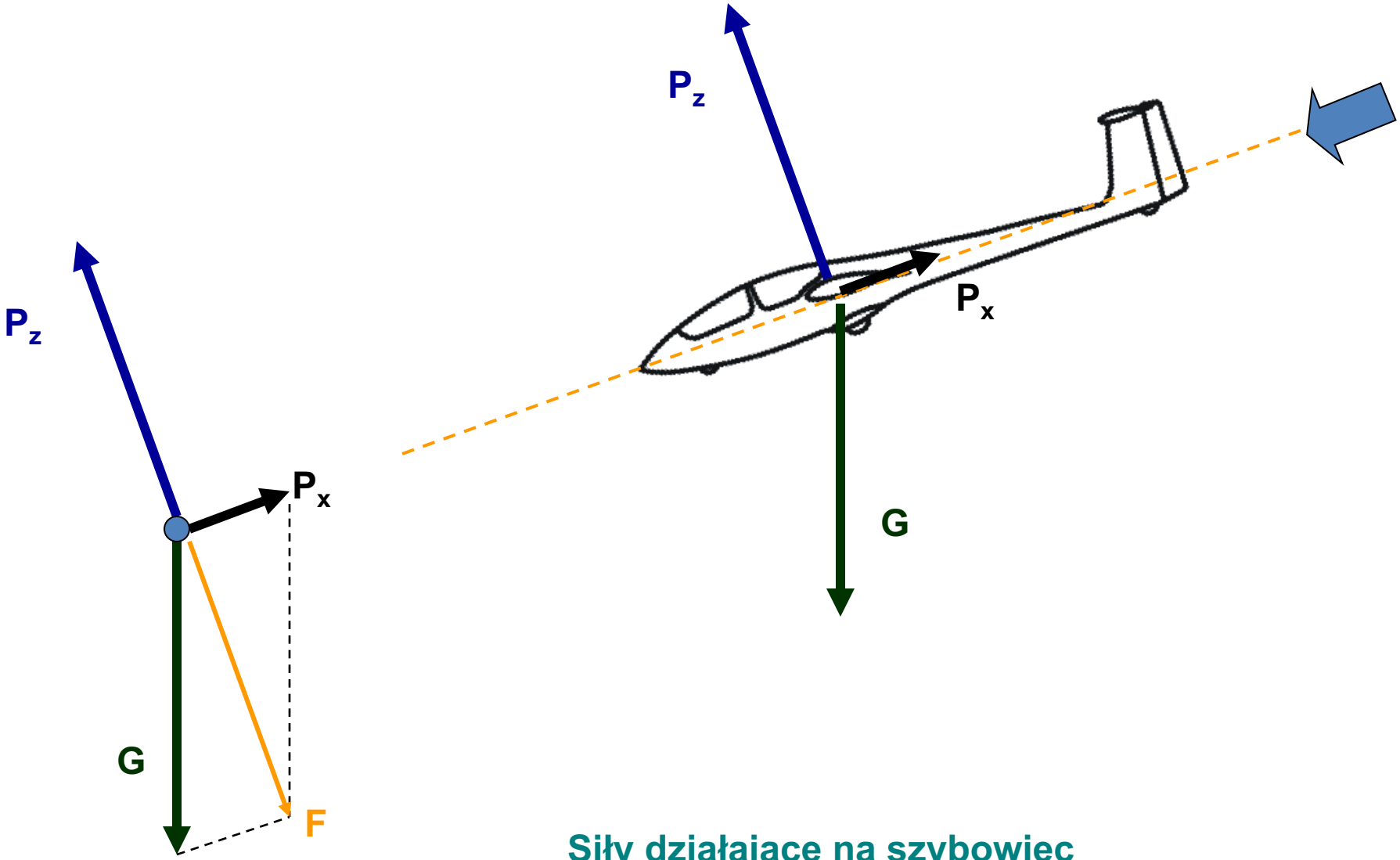
Siły działające na szybowiec holowany przez samolot



Siły działające na szybowiec w locie ślizgowym



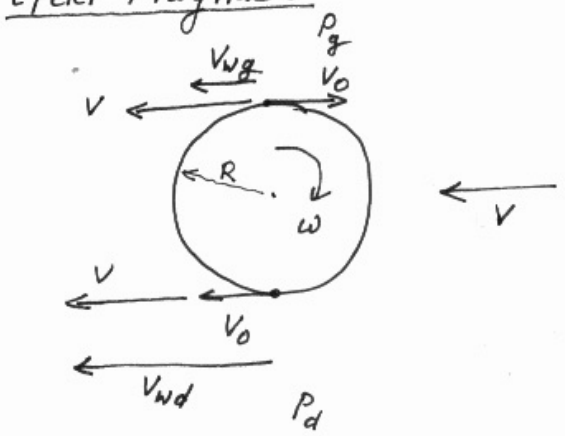
Siły działające na szybowiec w locie ślizgowym



Siły działające na szybowiec w locie ślizgowym

Przepływy zewnętrzne. Siła oporu. Siła nośna

Efekt Magnusa



v - prędkość ponietna (względem kuli/walca)

v_o - prędkość (na obwodzie) wynikająca z ruchu obrotowego

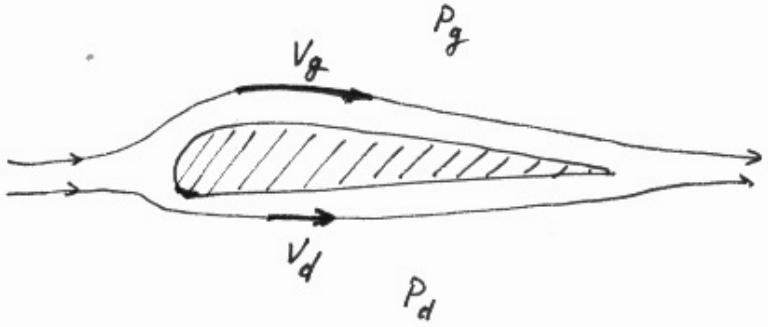
$v_o = \omega \cdot R$

v_w - prędkość wypadkowa

$v_{wd} > v_{wg} \xrightarrow{\text{z prawa Bernoulliego}} p_d < p_g$

$p_d < p_g \longrightarrow$ na kulę/walec obracający się działa siła skierowana pionowo w dół (przy ustalonym kierunku obrotu)

Siła nośna płata lotniczego



Z kształtu profilu lotniczego (i jego ustawienia względem napływających strug powietrza) wynika, że $v_g > v_d$.

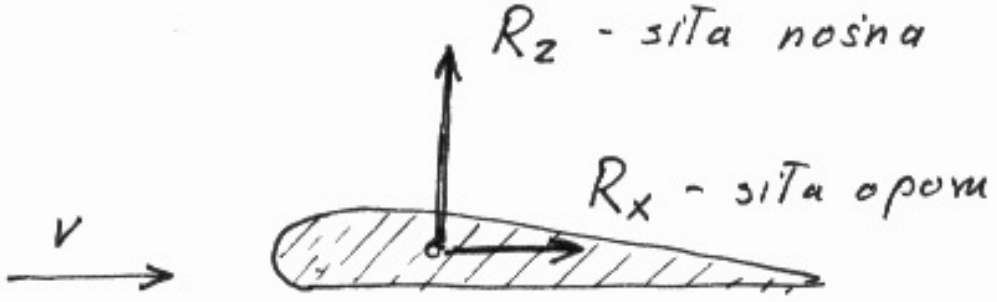
$$v_g > v_d \xrightarrow[\text{Bernoulliego}]{\text{z równania}} p_g < p_d$$

W wyniku różnicy ciśnień ($p_g < p_d$) powstaje siła nośna - skierowana pionowo do góry.

W wyniku tarcia (i powstawania strefy wirów) pojawia się siła oporu

W wyniku różnicy ciśnień ($p_g < p_d$) powstaje siła nośna - skierowana pionowo do góry.

W wyniku tarcia (i powstawania strefy wirów) pojawia się siła oporu



Siły R_z i R_x obliczamy ze wzorów empirycznych

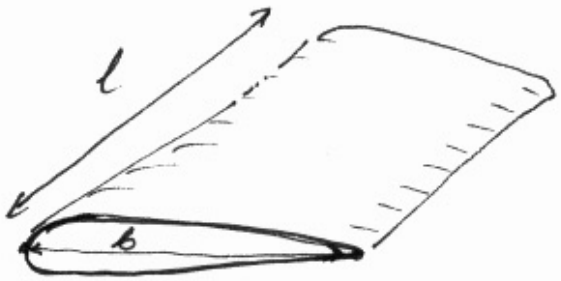
$$R_z = A\, c_z(\alpha) \cdot \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$R_x = A \cdot c_x(\alpha) \cdot \frac{1}{2} \rho v^2$$

$A = b \cdot l$ - powierzchnia skrzydła

b - długość cięciwy profilu

l - długość skrzydła

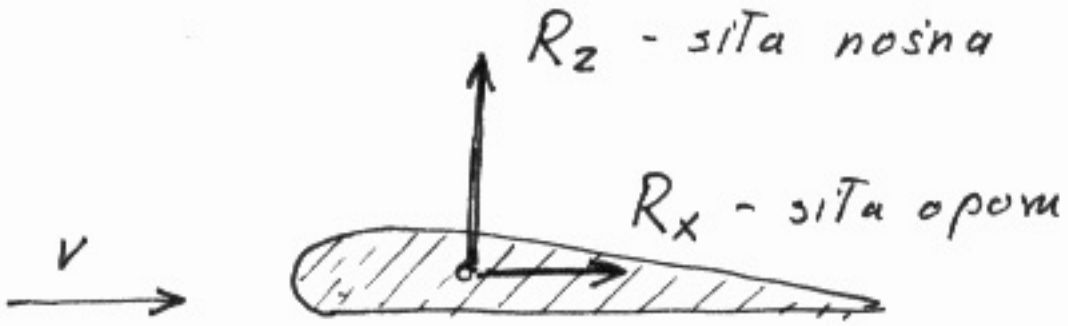


ρ - gęstość płynu (powietrza)

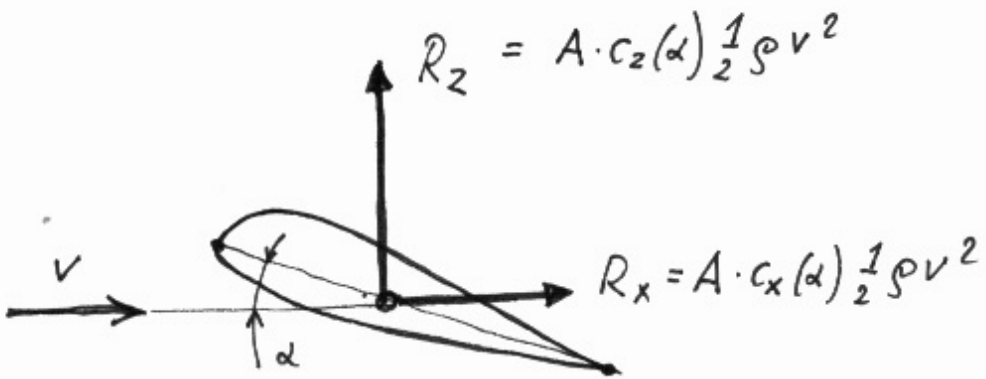
v - prędkość

α - kąt natarcia
czyli kąt między
cięciwą profilu
i wektorem $\bar{v}$.

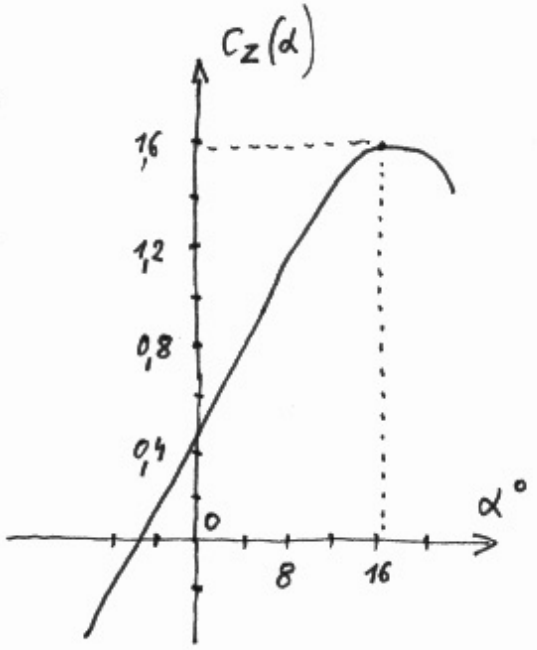
$c_z(\alpha)$, $c_x(\alpha)$ współczynniki będące funkcjami kąta α.
- określane eksperymentalnie (w tunelu aerodynamicznym)
- charakterystyczne dany profil aerodynamiczny.

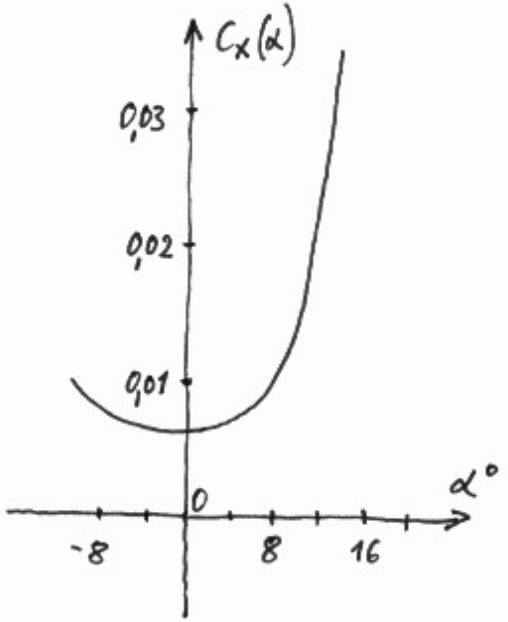


Profile lotnicze są tak ukształtowane aby osiągały możliwie duże wartości c_z (dużą siłę nośną R_z) i możliwie małe c_x (małą siłę oporu R_x)



Wykresy $c_z(\alpha)$ i $c_x(\alpha)$ dla przykładowego profilu:





Uwaga: we wzorze na R_x (oraz R_z) dla płata lotniczego występuje powierzchnia skrzydła A (jako powierzchnia odniesienia).
W przypadku innych obiektów - do obliczania siły oporu $R_x = A \cdot c_x \cdot \frac{1}{2} \rho v^2$ powierzchnię odniesienia A przyjmuje zgodnie z danymi w tablicach współczynnika c_x dla danej bryły.

Zadanie - projektowanie samolotu.

Ciężar całkowity samolotu (ciężar własny + ładunek) $G = 12\,kN$

Rozpiętość skrzydeł $l = 12\,m$
Cięciwa profilu $b = 1{,}8\,m$
$\Big\} \rightarrow A = b \cdot l = 21{,}6\,m^2$

Kąt natarcia podczas startu $\alpha = 8°$

Ponadto przyjmujemy gęstość powietrza $\rho = 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$

---

1. Obliczyć prędkość startową $V_s = ?$

$$G = R_z = A \cdot C_z(8°) \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_s^2$$

Zakładamy profil skrzydła, w którym $C_z(\alpha)$, $C_x(\alpha)$ mają możliwie przedstawione jak na rysunkach powyżej.
Z wykresu $C_z(\alpha)$ odczytujemy $C_z(8°) = 1{,}2$

$$12\,000 = 21{,}6 \cdot 1{,}2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot V_s^2 \rightarrow \underline{V_s = 28\,\frac{m}{s}}$$

Zadanie - projektowanie samolotu.

Ciężar całkowity samolotu (ciężar własny + ładunek) $G = 12\,kN$

Rozpiętość skrzydeł $l = 12\,m$

Cięciwa profilu $b = 1{,}8\,m$

$\Big\} \rightarrow A = b \cdot l = 21{,}6\,m^2$

Kąt natarcia podczas startu $\alpha = 8°$

Ponadto przyjmujemy gęstość powietrza $\rho = 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$

---

2. Zakładając prędkość przelotową $V_p = 50\,\frac{m}{s}$ obliczyć kąt natarcia podczas takiego lotu

$$12000 = 21{,}6 \cdot C_z \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 50^2 \rightarrow C_z = 0{,}37$$

Z wykresu $C_z(\alpha)$ dla $C_z = 0{,}37$ znajdujemy $\alpha_p = -1°$

Zadanie - projektowanie samolotu.

Ciężar całkowity samolotu (ciężar własny + ładunek) $G = 12\,kN$

Rozpiętość skrzydeł $l = 12\,m$
Cięciwa profilu $b = 1{,}8\,m$
$\Big\} \rightarrow A = b \cdot l = 21{,}6\,m^2$

Kąt natarcia podczas startu $\alpha = 8°$

Ponadto przyjmujemy gęstość powietrza $\rho = 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$

---

3. Obliczyć wymaganą moc silnika przy prędkości przelotowej $50\,\frac{m}{s}$, zakładając dla kadłuba:

$(c_x)_k = 0{,}09$

$A_k = 1{,}5\,m^2$ (rzut na płaszczyznę $\perp$ do kierunku ruchu) $\Big\}$ dla kadłuba

Z wykresu $C_x(\alpha)$ dla danego profilu odczytujemy

$C_x(-2°) = 0{,}006.$

$$R_x = A \cdot C_x(-2°) \cdot \frac{1}{2} \rho V_p^2 + A_k \cdot (C_x)_k \cdot \frac{1}{2} \rho V_p^2$$

$$R_x = 21{,}6 \cdot 0{,}006 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 50^2 + 1{,}5 \cdot 0{,}09 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 50^2$$

$R_x = 194{,}4 + 202{,}5 = \underline{396{,}9\ N}$ (opór całkowity skrzydła i kadłuba)

Moc silnika $\underline{N} = R_x \cdot V_p = 396{,}9 \cdot 50 = \underline{19{,}845\ kW}$

4. Obliczyć prędkość minimalną (prędkość przeciągnięcia)

$v_m = ?$

Z wykresu $c_z(\alpha)$ widzimy, że $\alpha_{max} = 16^\circ$ - powyżej tej wartości kąta natarcia c_z (a zatem także R_z) gwałtownie maleje.

Wartość $\alpha = 15^\circ$ jest wartością krytyczną kąta natarcia przy której R_z osiąga wartość maxymalną. Przy $\alpha > 16^\circ$ R_z gwałtownie maleje i samolot nie może utrzymać się w powietrzu. Wartości α_{max} odpowiada prędkość minimalna v_m (prędk. przeciągnięcia).

Z wykresu $c_z(\alpha)$ odczytujemy $c_z(16^\circ) = (c_z)_{max} = 1{,}6$.

$$12000 = 21{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot v_m^2$$

stąd $v_m = 24 \frac{m}{s}$

MECHANIKA PŁYNÓW

PŁYNY ŚCIŚLIWE

$$\dot{m} = Aw\rho = const \qquad \dot{V} = Aw = const$$

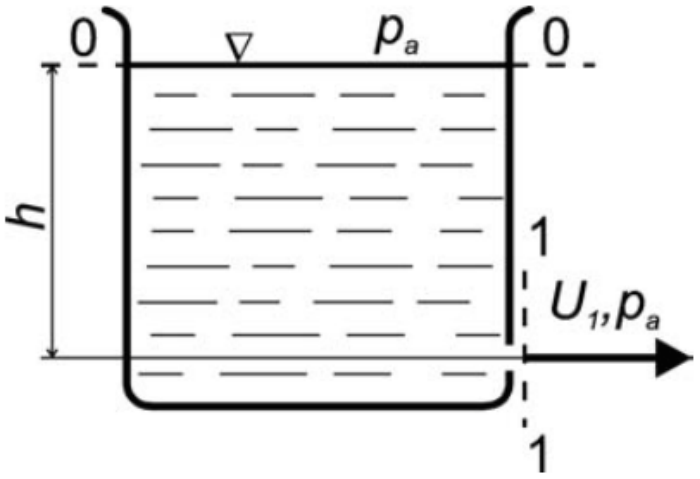
Dane:

$p_0 = p_1 = p_a$

$h = 5$ m

Wyznaczyć:

U_1

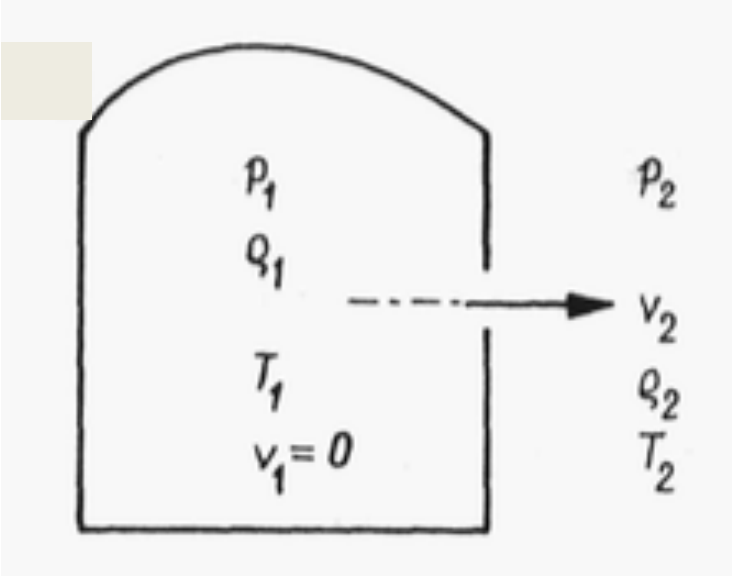


$$\frac{0}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + h = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + 0$$

$$\frac{U_1^2}{2g} = h, \quad U_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 5} = 9.9 \frac{m}{s}$$

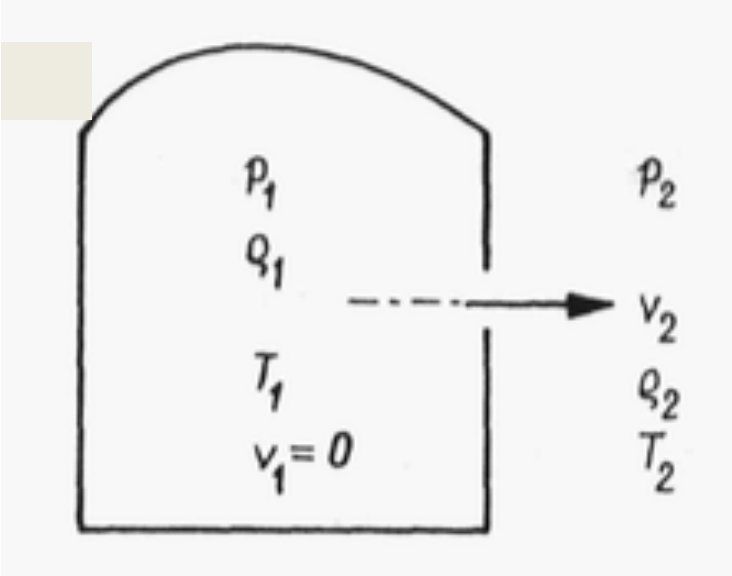
$Q = A \sqrt{2gh}$

Wypływ gazu ze zbiornika



$$\left(i_2 + \frac{v_2^2}{2} + g\,z_2\right) - \left(i_1 + \frac{v_1^2}{2} + g\,z_1\right) = e_c + l_t$$

$$i_1 + \frac{v_1^2}{2} = i_2 + \frac{v_2^2}{2}$$



$$i_1 + \frac{v_1^2}{2} = i_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

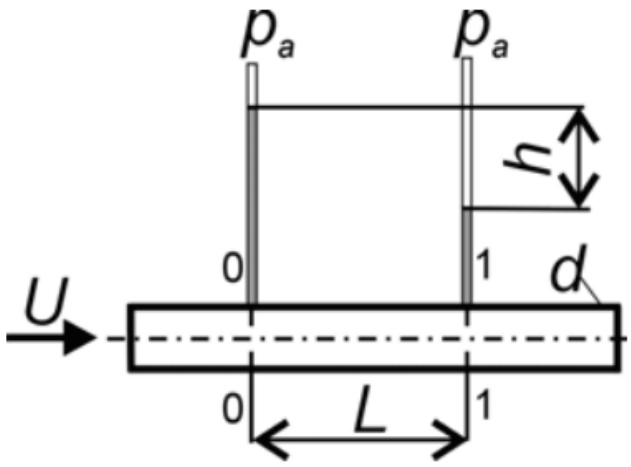
$$i_2 - i_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R$$

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T$$

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$U_0 = U_1 = U$$
$$z_0 = z_1 = 0$$



$$\frac{U_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + z_0 = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 + h_{str}$$

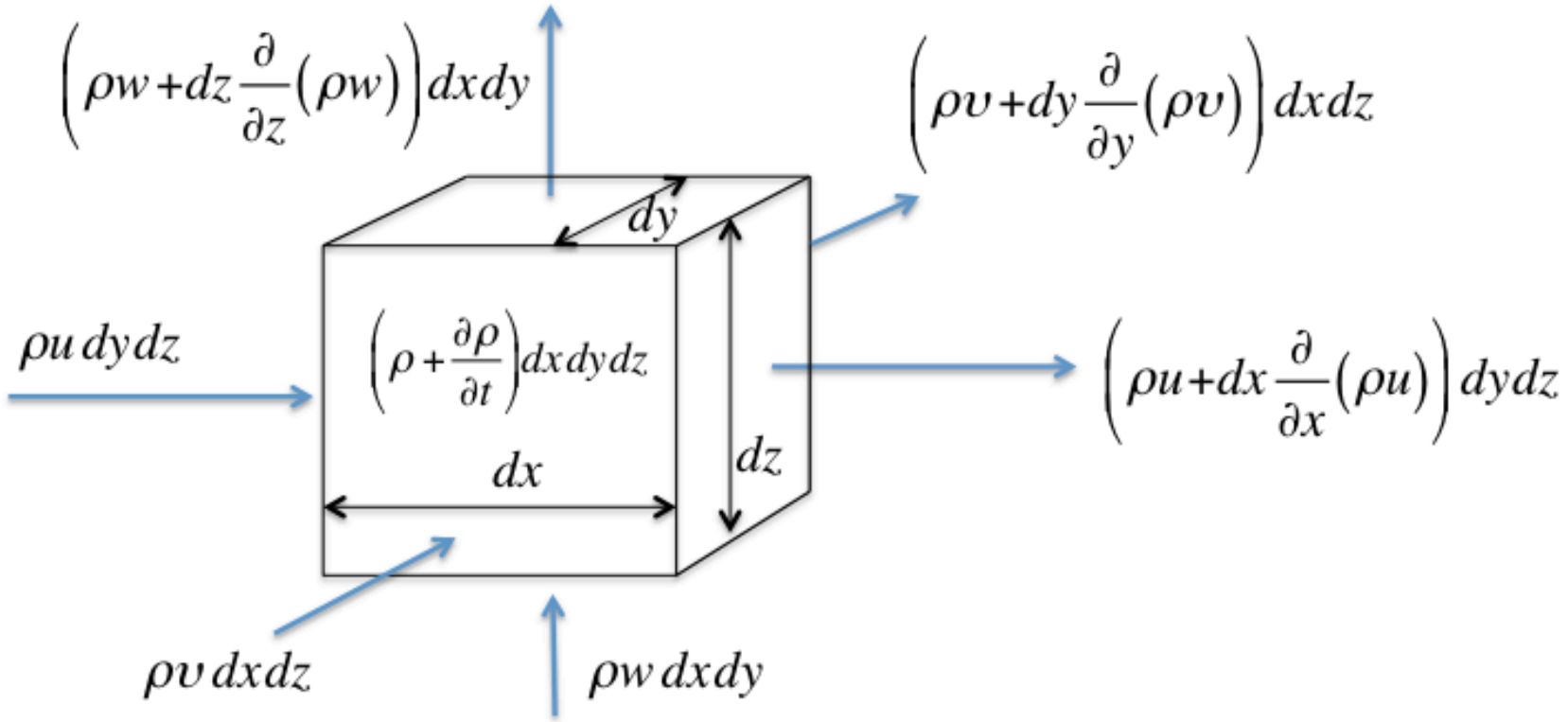
$$h_{str} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \frac{U^2}{2g}$$

Przepływ gazu w rurociągu

MECHANIKA PŁYNÓW

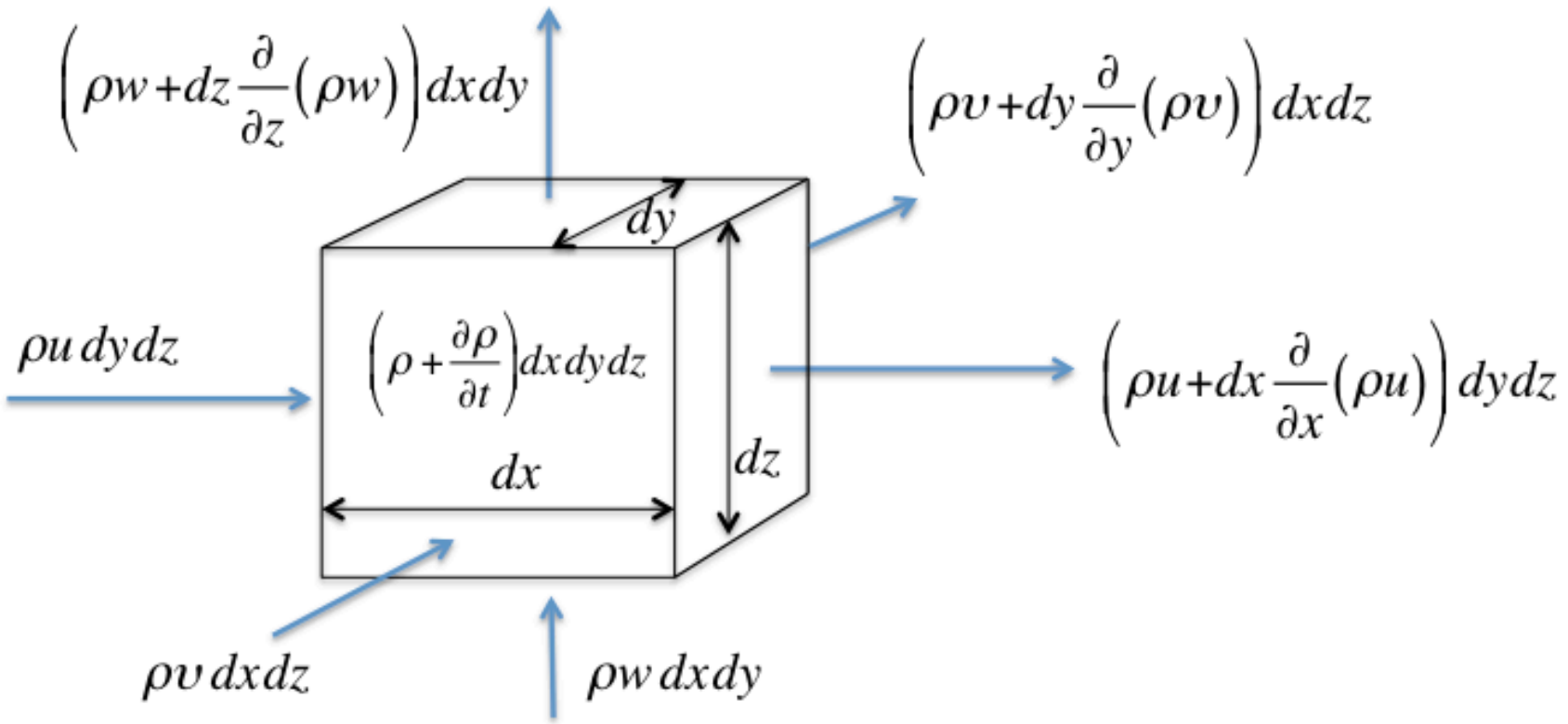
PRZEPŁYWY 3D

RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI PRZEPŁYWU



$\rho(x,y,z,t)$ - gęstość płynu w punkcie (x,y,z) w chwili t
$u(x,y,z,t)$ prędkość płynu w kierunku x.
$v(x,y,z,t)$ w kierunku y.
$w(x,y,z,t)$ w kierunku z

przyrost masy = masa wpływająca - masa wypływająca



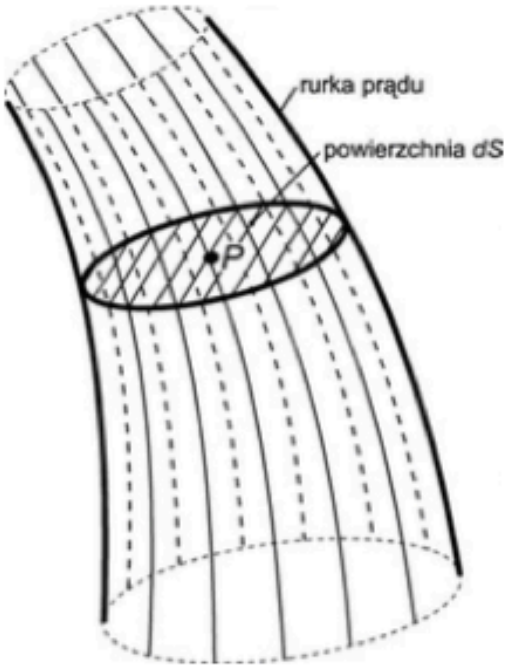
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dxdydz = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\,dx\,dy\,dz$$

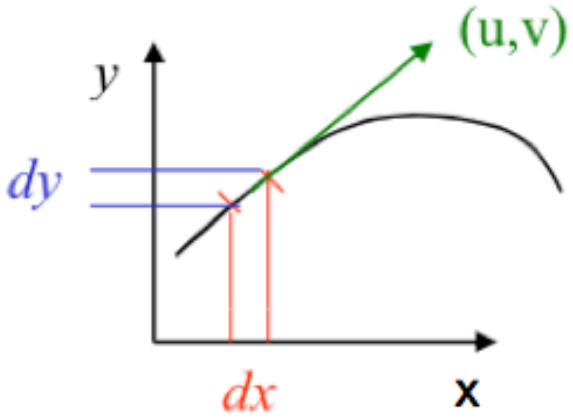
$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

RÓWNANIE LINII (WŁÓKNA) PRĄDU

Jeżeli przez każdy punkt zamkniętego konturu otaczającego nieskończenie małe pole *dS* poprowadzimy linie prądu wówczas utworzą one powierzchnię zwaną **rurką prądu.** Jednocześnie można przeprowadzić linie prądu przez każdy punkt powierzchni *dS*; taki zbiór linii prądu nazywamy **włóknem prądu.**

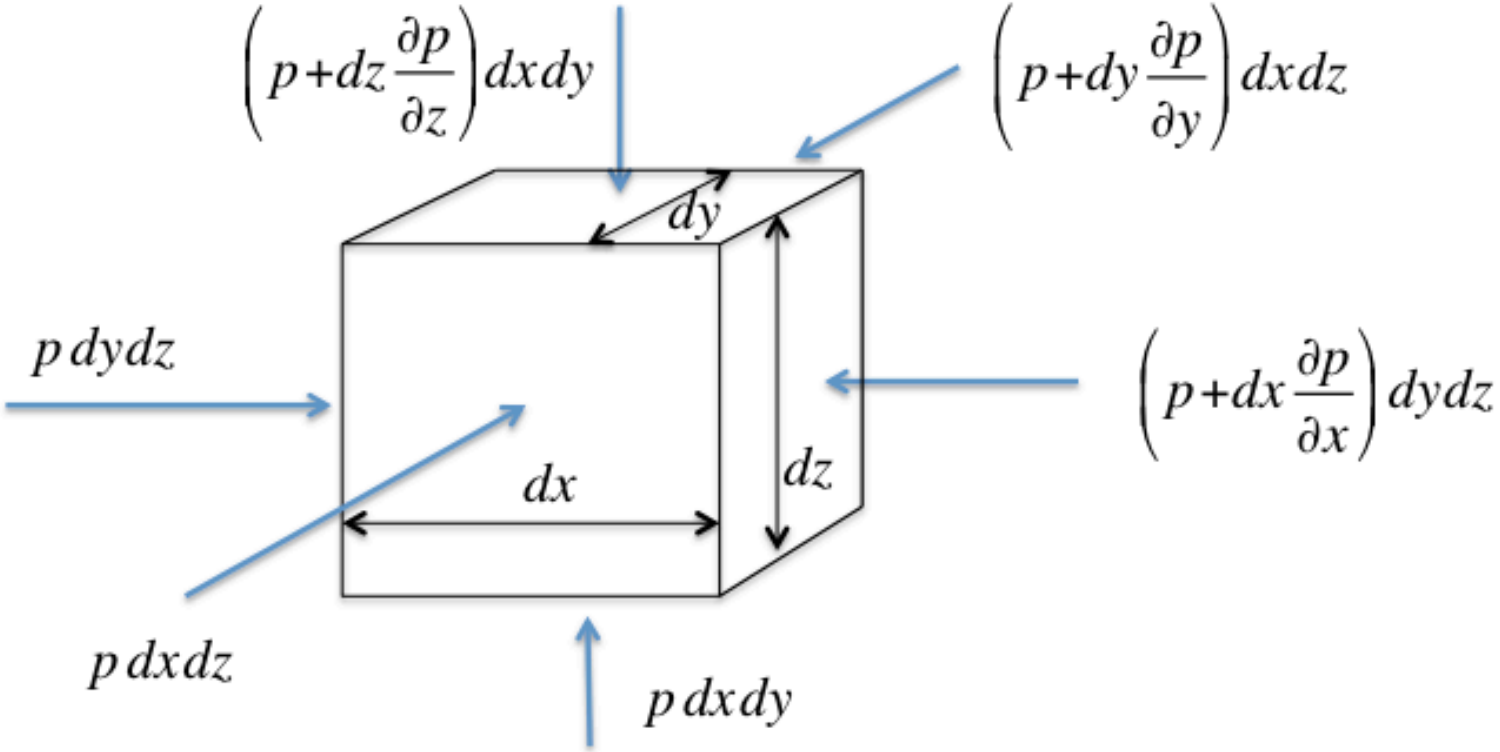




$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \qquad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

RÓWNANIE EULERA



$$f_x \rho\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz = \frac{du}{dt}\rho\,dx\,dy\,dz$$

$$f_y \rho\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial p}{\partial y}dx\,dy\,dz = \frac{d\upsilon}{dt}\rho\,dx\,dy\,dz$$

$$f_z \rho\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial p}{\partial z}dx\,dy\,dz = \frac{dw}{dt}\rho\,dx\,dy\,dz$$

$$f_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{du}{dt}$$

$$f_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$f_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial u}{\partial z}w$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}u + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial z}w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial w}{\partial z}w$$

$$f_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial u}{\partial z}w$$

$$f_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}u + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial z}w$$

$$f_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial w}{\partial z}w$$

$$f_x \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial x}dx\, dy dz = \frac{du}{dt}\rho\, dx\, dy\, dz$$

$$f_y \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial y}dx\, dy dz = \frac{d\upsilon}{dt}\rho\, dx\, dy\, dz$$

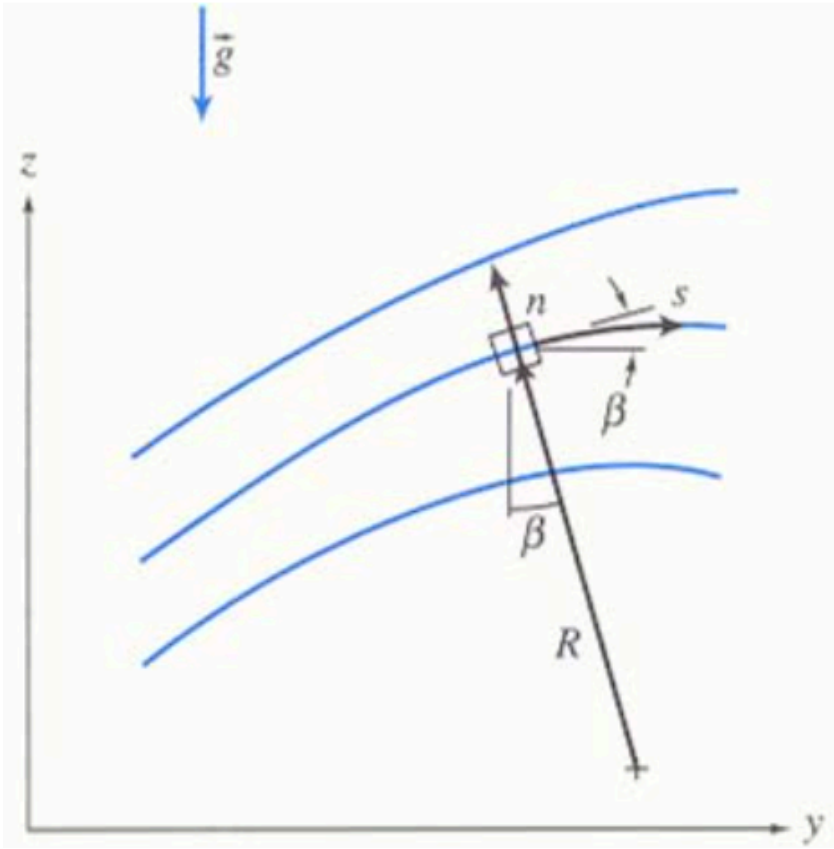
$$f_z \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial z}dx\, dy dz = \frac{dw}{dt}\rho\, dx\, dy\, dz$$

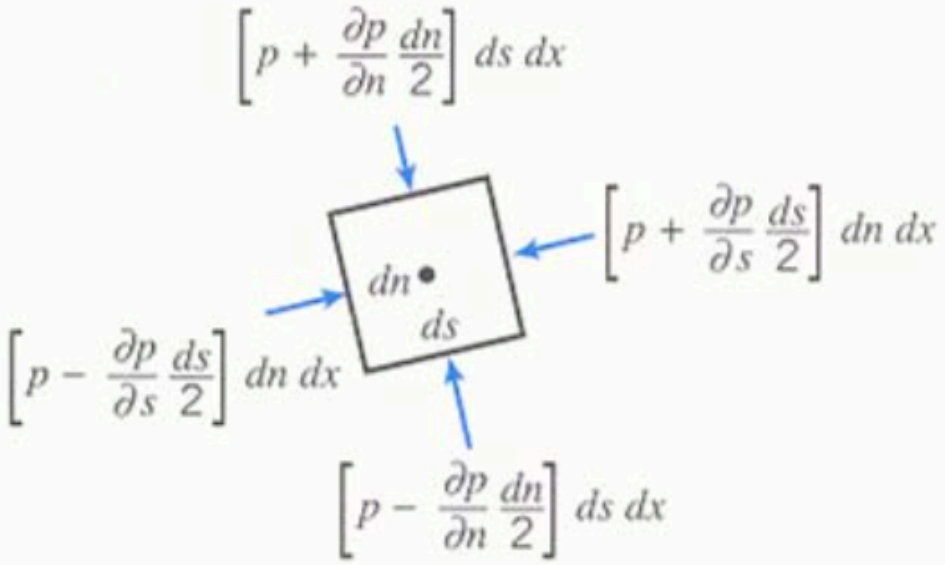
$$f_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{du}{dt}$$

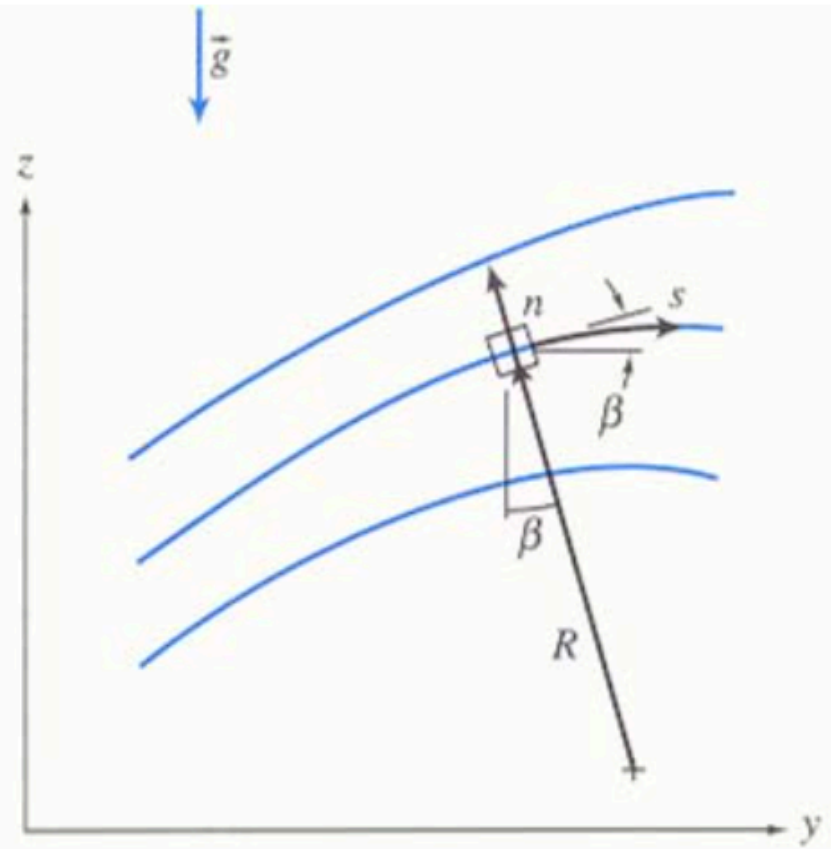
$$f_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{d\upsilon}{dt}$$

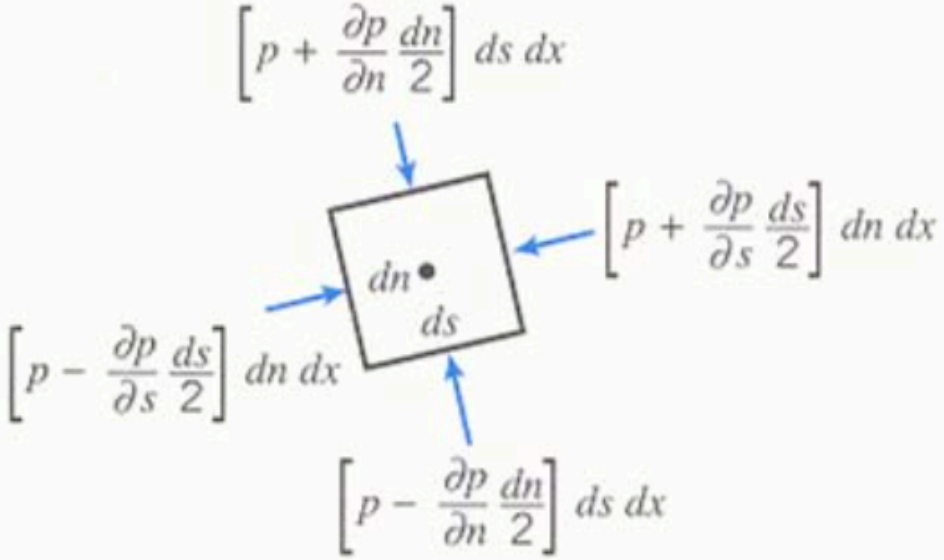
$$f_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{dw}{dt}$$

RÓWNANIE BERNOULLIEGO


g
z
n
s
β
β
R
y


$\left[p + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right] ds\, dx$
$\left[p + \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right] dn\, dx$
$\left[p - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right] dn\, dx$
$\left[p - \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right] ds\, dx$
dn
ds





$$\sin\beta = \partial z/\partial s$$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin\beta = \rho a_s$$

$$a_s = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = V\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\frac{\partial p}{\partial s}\,ds = dp$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}\,ds = dz$$

$$\frac{\partial V}{\partial s}\,ds = dV$$

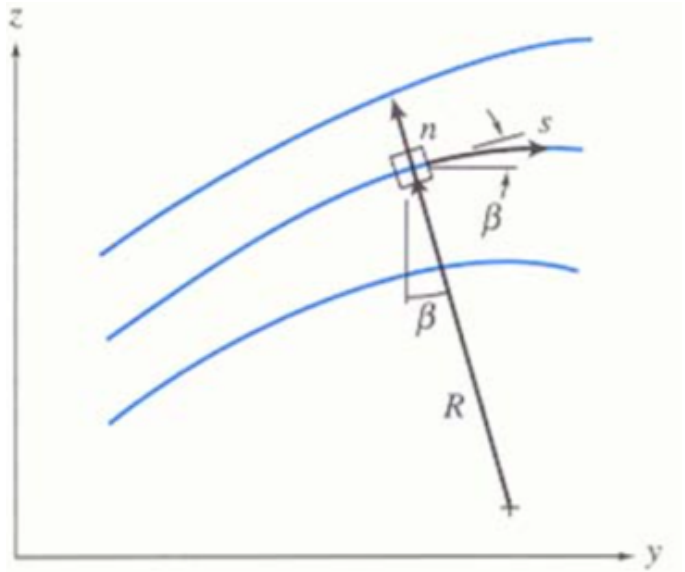
zmiana p, z, V wzdłuż linii prądu

$$\frac{dp}{\rho} + V\,dV + g\,dz = 0$$

$$\frac{dp}{\rho} + V\,dV + g\,dz = 0$$

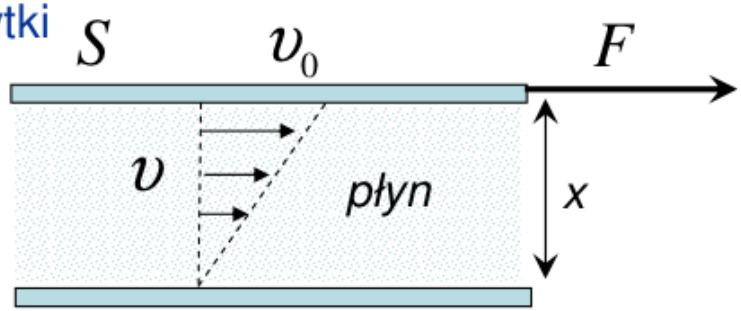
Po scałkowaniu wzdłuż *S*

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant}$$



RÓWNANIE NAVIERA STOKESA

Rozważmy dwie (bliskie siebie) płaskie płytki z cieczą lepką pomiędzy nimi…



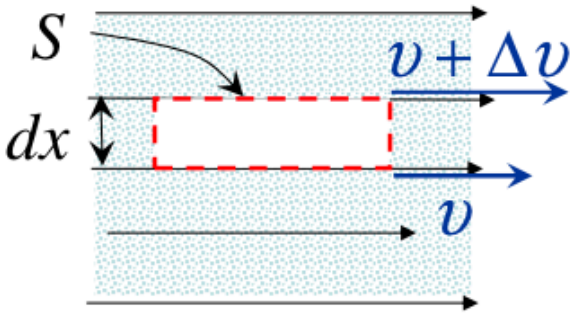
Naprężenie ścinania

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{x}$$

η - współczynnik lepkości

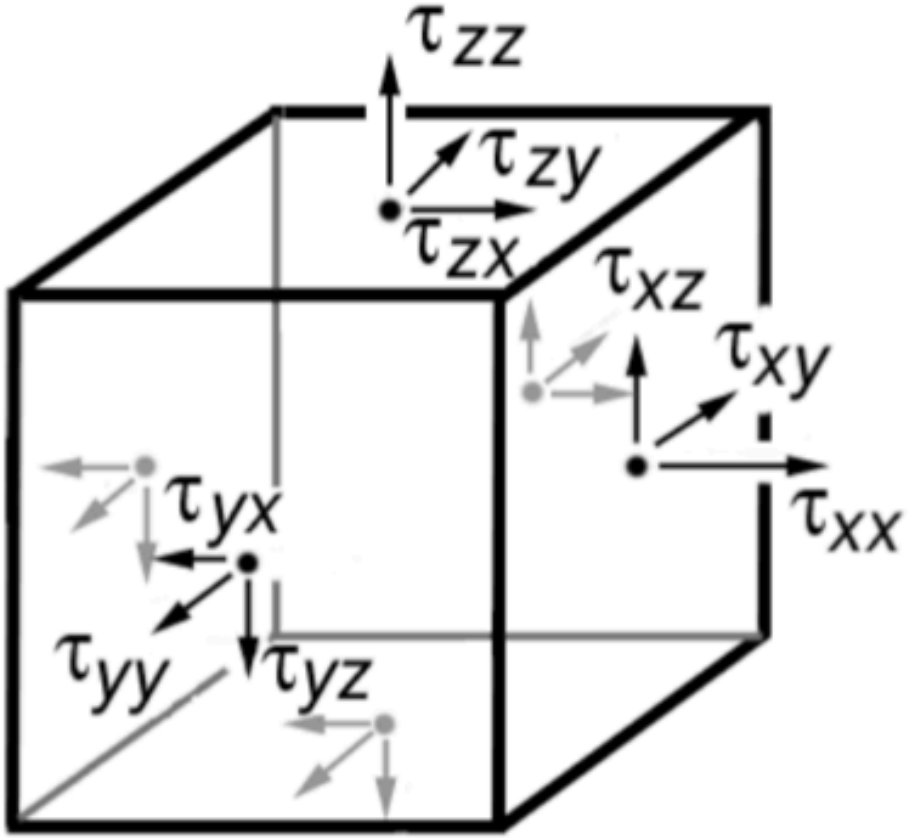
S - powierzchnia płytki

Jeśli rozważymy dwie bardzo bliskie warstwy w cieczy to wtedy siłę ścinającą (siłę lepkości) możemy przedstawić w postaci



$$F = \eta S \frac{dv}{dx}$$

$\frac{dv}{dx}$ - spadek szybkości cieczy w kierunku prostopadłym do przepływu



$$p_{xx}dydz-\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz+\tau_{yx}dzdx-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx+\tau_{zx}dxdy-\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)=-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dv_x}{dt}\rho dxdydz=X\rho dxdydz-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right).$$

$$p_{xx} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x},$$

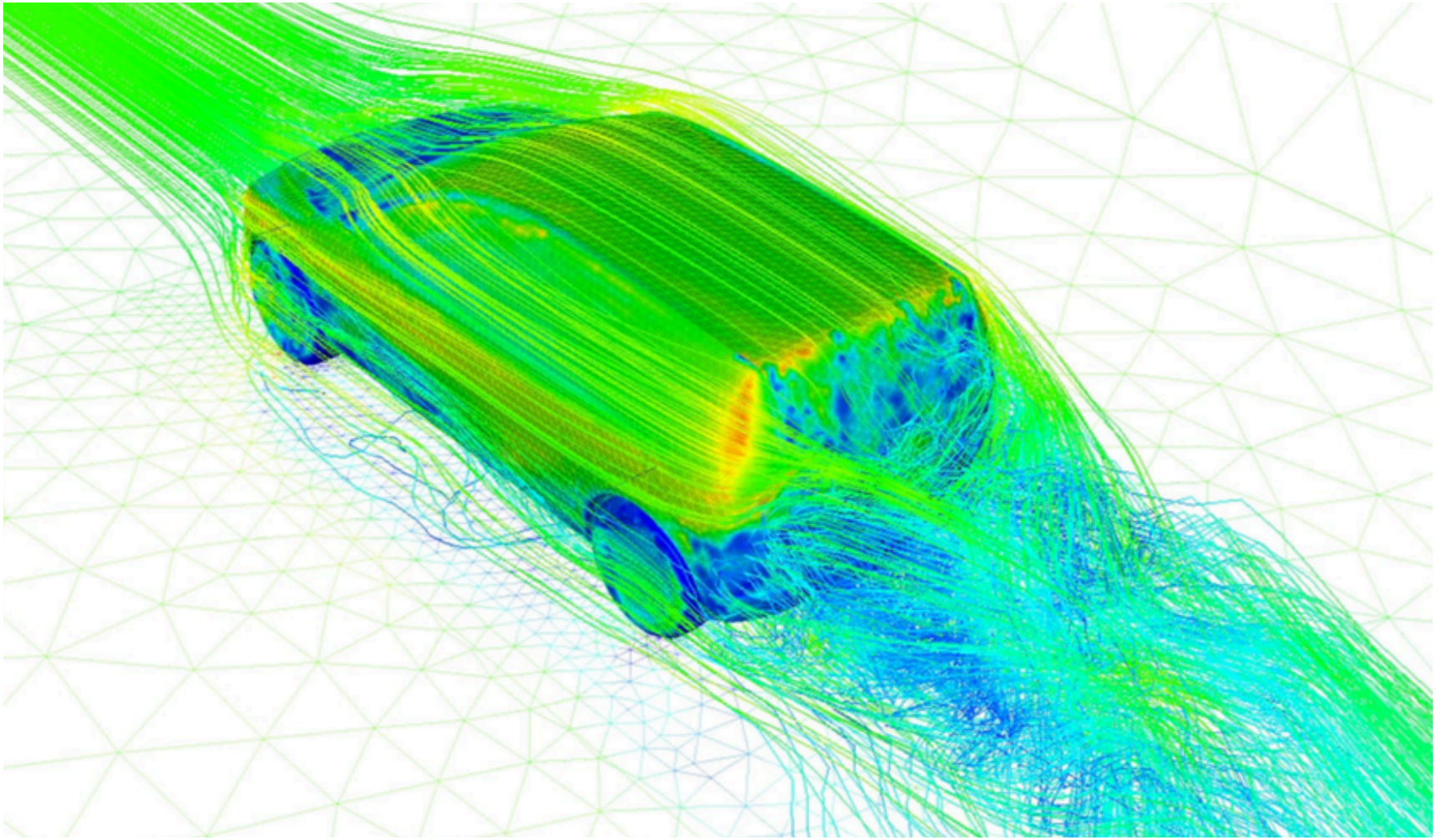
$$p_{yy} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y},$$

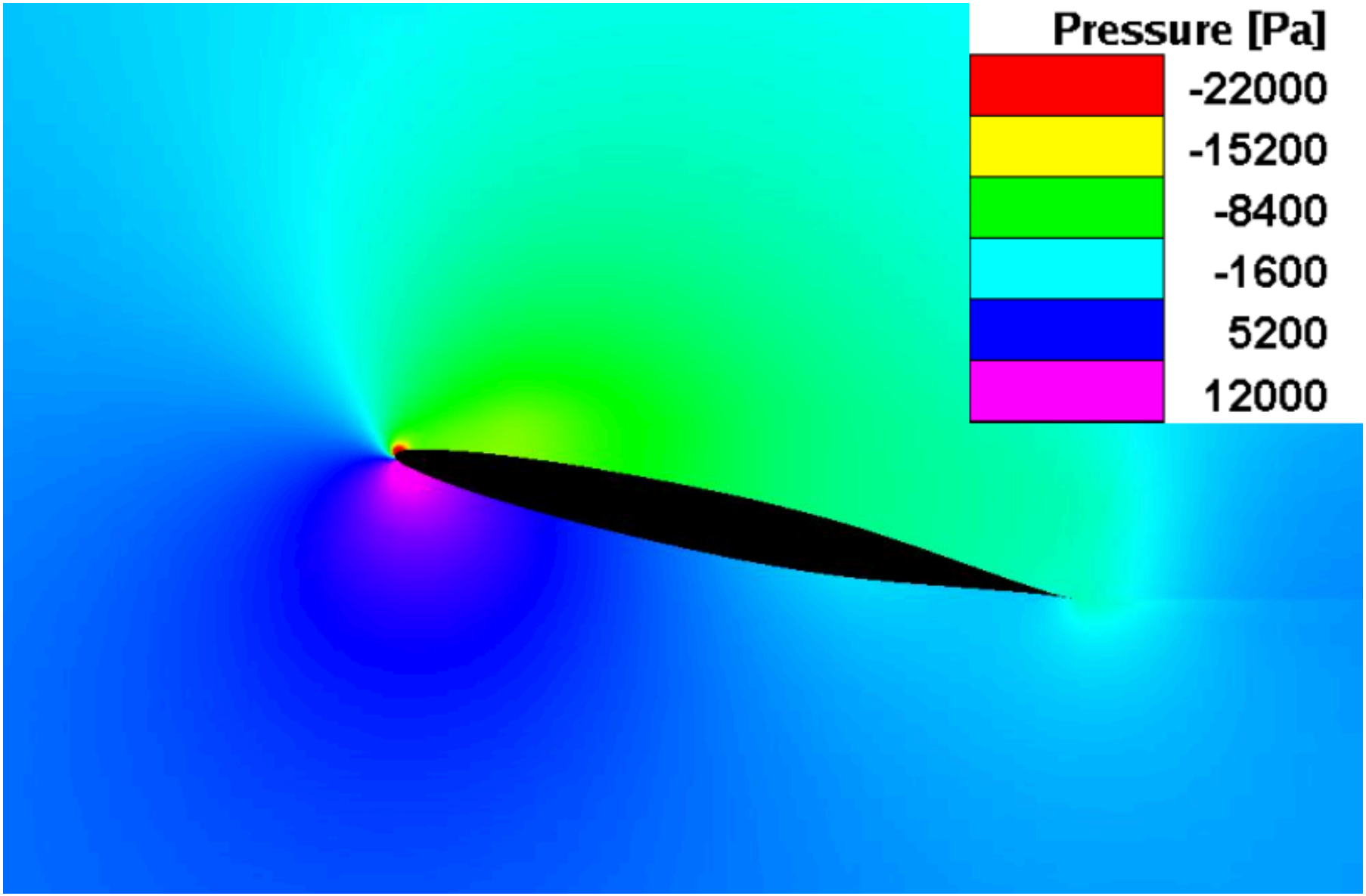
$$p_{zz} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}.$$

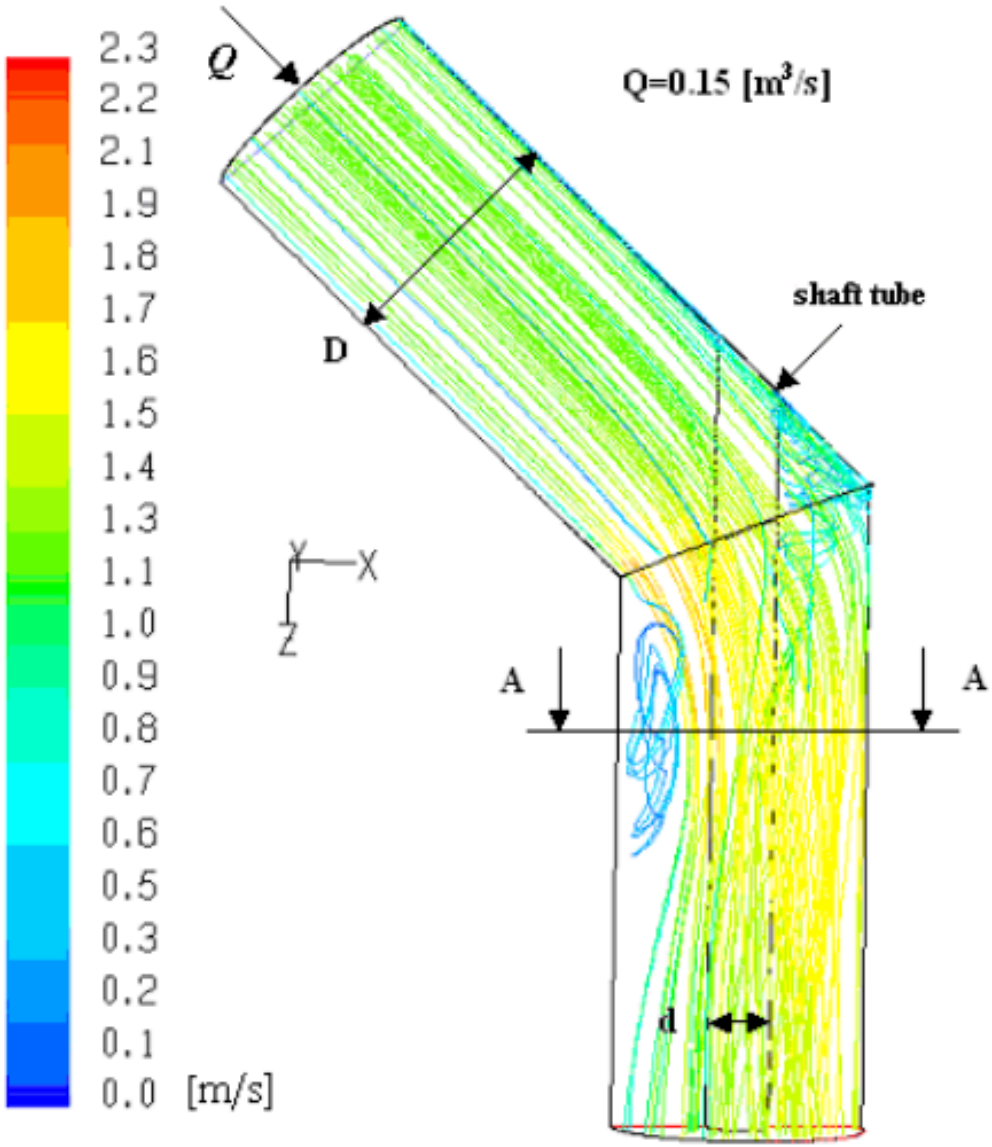
$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$




Pressure [Pa]
-22000
-15200
-8400
-1600
5200
12000


2.3
2.2
2.1
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.3
0.2
0.1
0.0 [m/s]
Q
Q=0.15 [m³/s]
D
shaft tube
Y
X
Z
A
A
d

$$\Delta p^{sl} = \lambda \frac{l}{d}\frac{\rho}{2}v^2 = \lambda \frac{l}{d}\left(\frac{4q_V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{\rho}{2}$$ - wzór Darcy'ego–Weisbacha

$$dp^{sl} = \lambda \frac{dl}{d}\frac{\rho(p)}{2}v^2 = \lambda \frac{dl}{d}\left(\frac{4q_V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{\rho(p)}{2} = \lambda \frac{dl}{d}\left(\frac{4q_m}{\pi \rho(p)\, d^2}\right)^2 \frac{\rho(p)}{2}$$

$$q_m = \rho q_V$$

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$-dp^{sl} = \lambda \frac{dl}{d}\left(\frac{4q_m}{\pi \rho(p)\, d^2}\right)^2 \frac{\rho(p)}{2} = \lambda \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5}\frac{1}{\rho(p)}dl = \lambda \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5}\frac{\left(p_0/p\right)^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_0}dl$$

$$-\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp^{sl} = \lambda \ \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5} dl$$

$$\int_{p_1}^{p_2} -\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp^{sl} = \int_0^1 \lambda \ \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5} dl$$

$$\int_{p_1}^{p_2} -\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp^{sl} = \int_0^1 \lambda \ \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5} dl$$

$$\frac{\kappa}{\kappa+1}\frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}}\left(p_1^{\kappa+1/\kappa} - p_2^{\kappa+1/\kappa}\right) = \lambda \ \frac{8q_m^2 l}{\pi^2 d^5}$$

$$-dp^{sl} = \lambda \ \frac{dl}{d}\left(\frac{4q_m}{\pi\,\rho(p)\,d^2}\right)^2 \frac{\rho(p)}{2} = \lambda \ \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5}\frac{1}{\rho(p)} dl = \lambda \ \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5}\frac{\left(p_0/p\right)^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_0} dl$$

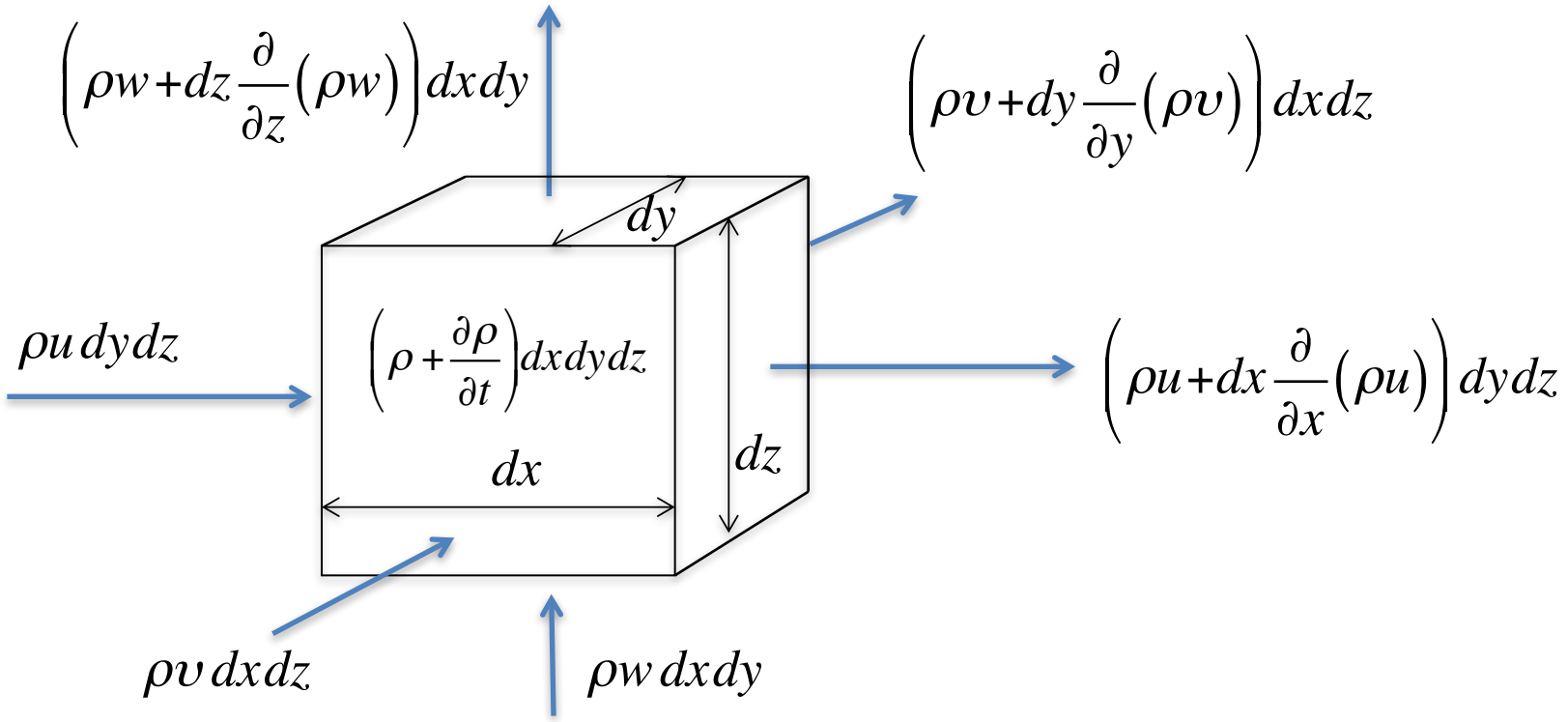
$$-\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp^{sl} = \lambda \ \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5} dl$$

$$\int_{p_1}^{p_2} -\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp^{sl} = \int_0^1 \lambda \ \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5} dl$$

$$\int_{p_1}^{p_2} -\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp^{sl} = \int_0^1 \lambda \ \frac{8q_m^2}{\pi^2 d^5} dl$$

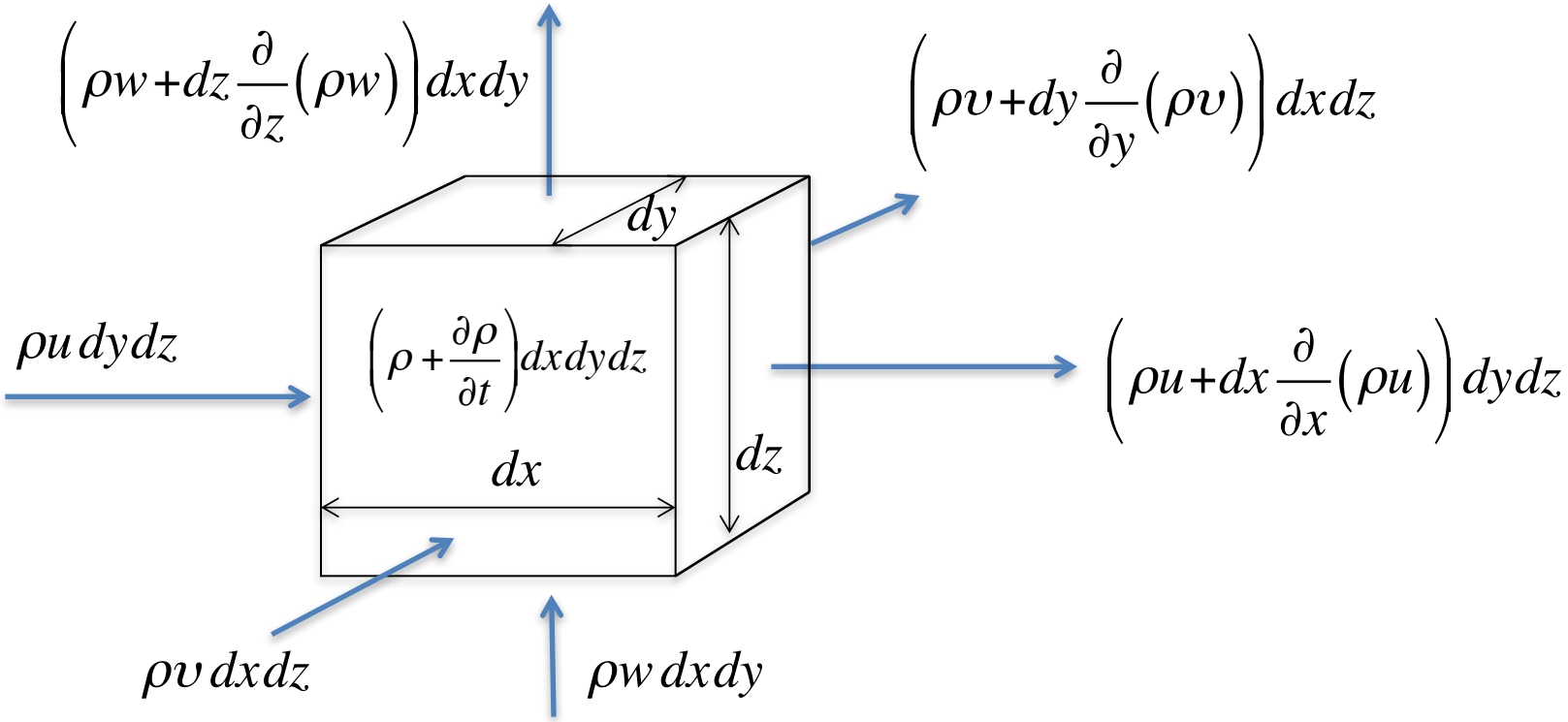
$$\frac{\kappa}{\kappa+1}\frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}}\left(p_1^{\kappa+1/\kappa} - p_2^{\kappa+1/\kappa}\right) = \lambda \ \frac{8q_m^2 l}{\pi^2 d^5}$$

$$\lambda = \frac{\kappa}{\kappa+1}\frac{\rho_0 \ \pi^2 d^5}{8q_m^2 l}\frac{\left(p_1^{\kappa+1/\kappa} - p_2^{\kappa+1/\kappa}\right)}{p_0^{1/\kappa}} = \frac{\kappa}{\kappa+1}\frac{\rho_0 \ \pi^2 d^5}{8q_m^2 l} p_1\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\kappa} - \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{1/\kappa}\right]$$



$\rho(x,y,z,t)$ - gęstość płynu w punkcie (x,y,z) w chwili t
$u(x,y,z,t)$ prędkość płynu w kierunku x.
$v(x,y,z,t)$ w kierunku y.
$w(x,y,z,t)$ w kierunku z

przyrost masy = masa wpływająca - masa wypływająca

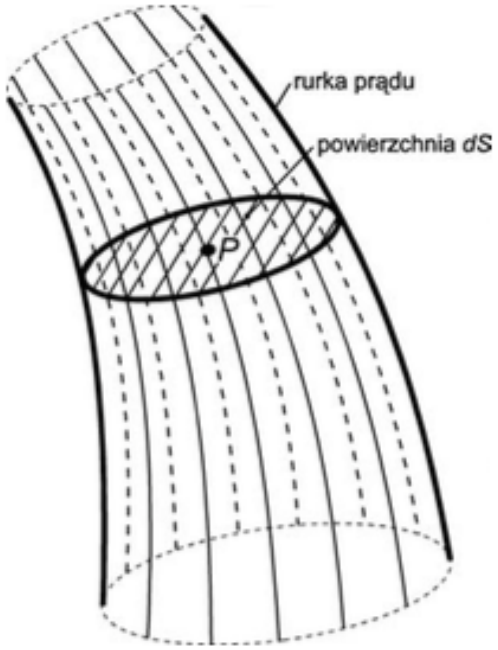


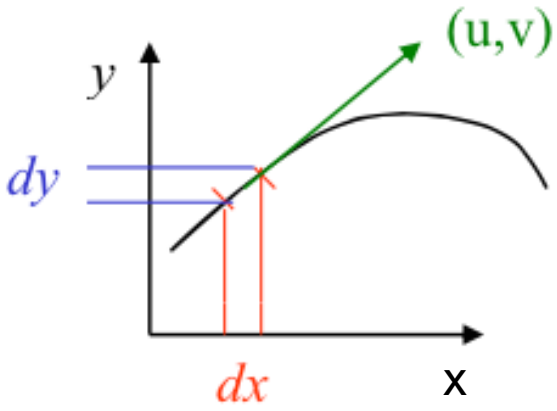
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\,dx\,dy\,dz$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

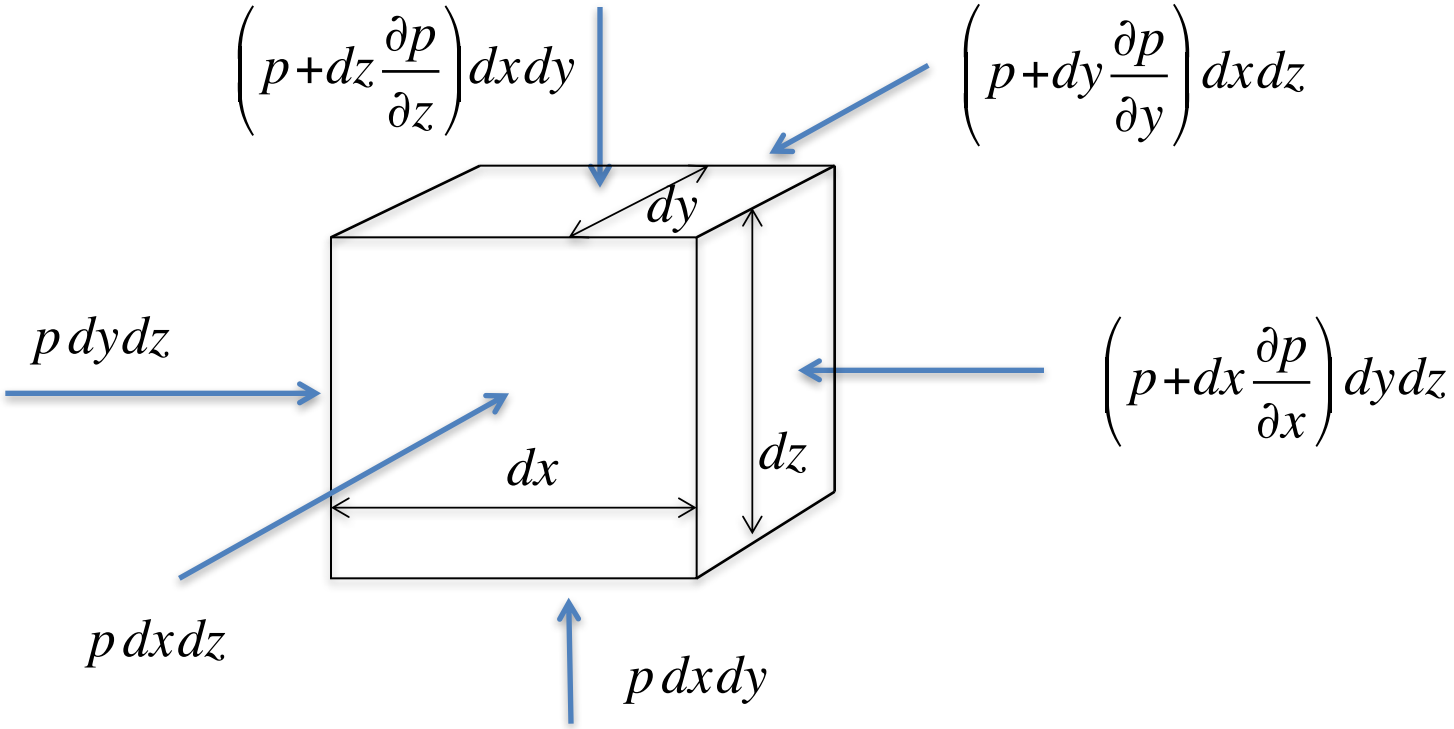
Jeżeli przez każdy punkt zamkniętego konturu otaczającego nieskończenie małe pole *dS* poprowadzimy linie prądu wówczas utworzą one powierzchnię zwaną **rurką prądu.** Jednocześnie można przeprowadzić linie prądu przez każdy punkt powierzchni *dS*; taki zbiór linii prądu nazywamy **włóknem prądu.**





$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \qquad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$



$$f_x \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz = \frac{du}{dt} \rho\, dx\, dy\, dz$$

$$f_y \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx\, dy\, dz = \frac{d\upsilon}{dt} \rho\, dx\, dy\, dz$$

$$f_z \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx\, dy\, dz = \frac{dw}{dt} \rho\, dx\, dy\, dz$$

$$f_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{du}{dt}$$

$$f_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$f_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial u}{\partial z}w$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}u + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial z}w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial w}{\partial z}w$$

$$f_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial u}{\partial z}w$$

$$f_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}u + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial z}w$$

$$f_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}\upsilon + \frac{\partial w}{\partial z}w$$

$$f_x \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial x}dx\, dy\, dz = \frac{du}{dt}\rho\, dx\, dy\, dz$$

$$f_y \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial y}dx\, dy\, dz = \frac{d\upsilon}{dt}\rho\, dx\, dy\, dz$$

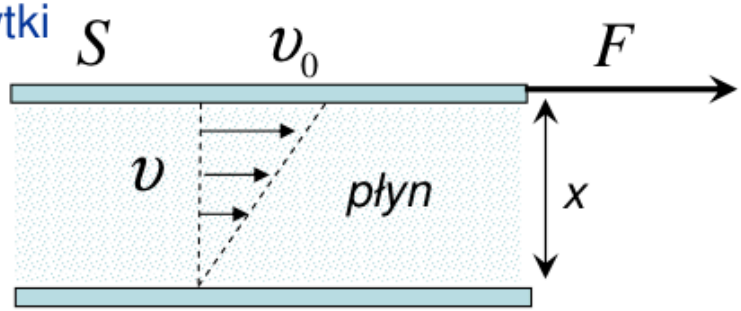
$$f_z \rho\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial z}dx\, dy\, dz = \frac{dw}{dt}\rho\, dx\, dy\, dz$$

$$f_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{du}{dt}$$

$$f_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$f_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{dw}{dt}$$

Rozważmy dwie (bliskie siebie) płaskie płytki z cieczą lepką pomiędzy nimi…



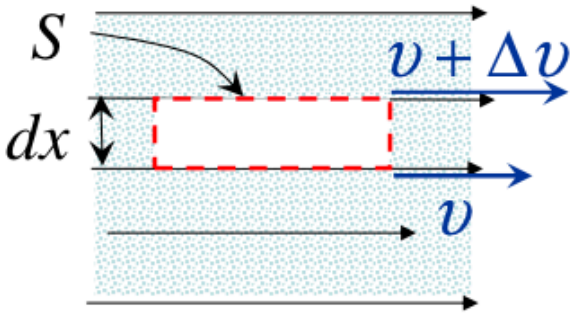
Naprężenie ścinania

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{x}$$

η - współczynnik lepkości

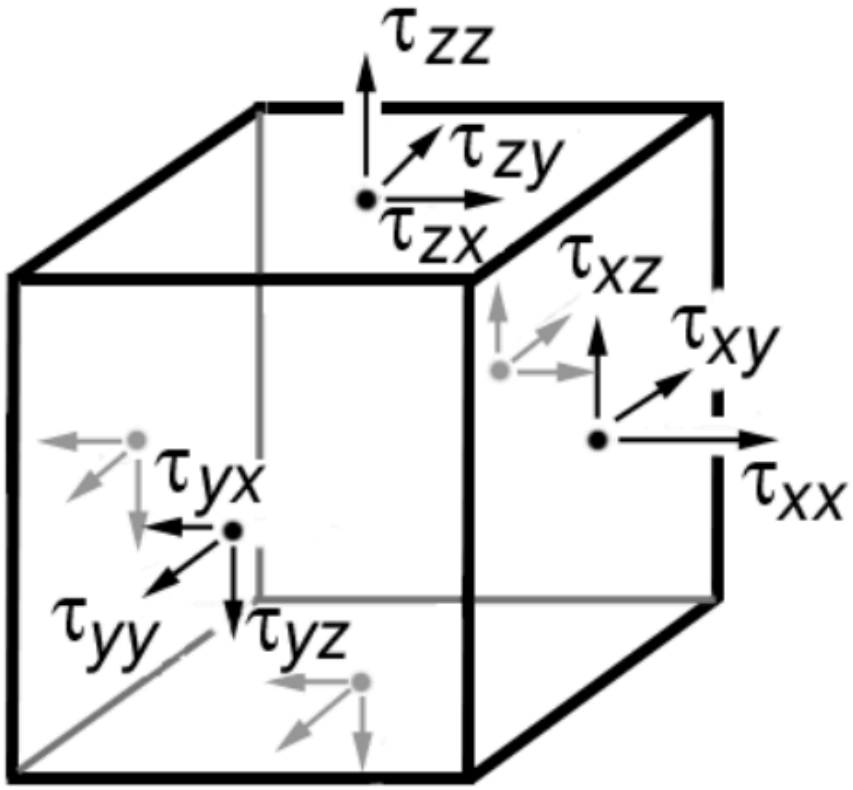
S - powierzchnia płytki

Jeśli rozważymy dwie bardzo bliskie warstwy w cieczy to wtedy siłę ścinającą (siłę lepkości) możemy przedstawić w postaci



$$F = \eta S \frac{dv}{dx}$$

$\frac{dv}{dx}$ - spadek szybkości cieczy w kierunku prostopadłym do przepływu



$$p_{xx}dydz-\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz+\tau_{yx}dzdx-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx+\tau_{zx}dxdy-\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)=-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}\rho dxdydz=X\rho dxdydz-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right).$$

$$p_{xx} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x},$$

$$p_{yy} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y},$$

$$p_{zz} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}.$$

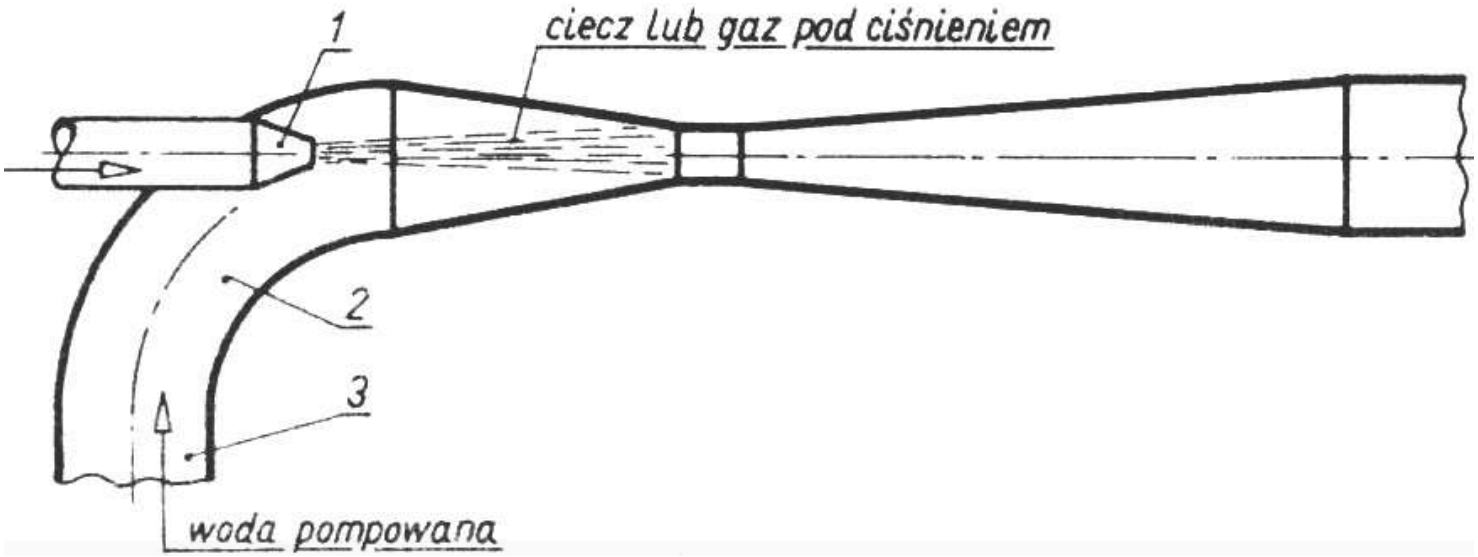
$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

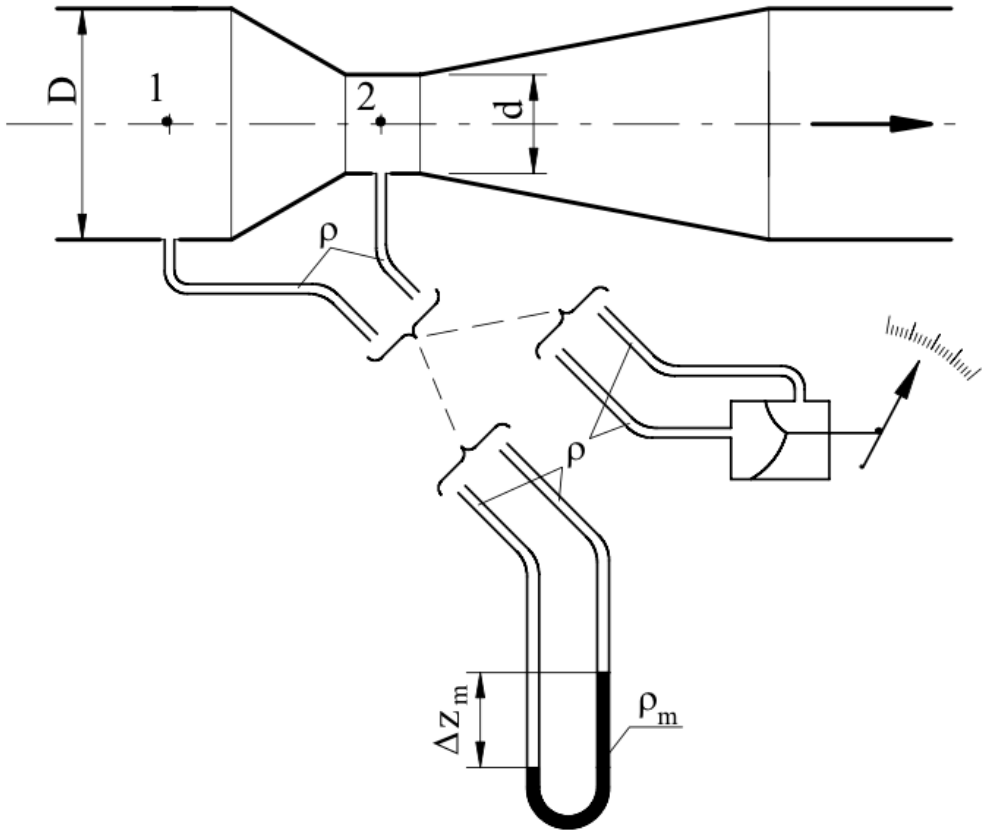
$$\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

KONIEC

Z analizy przepływu przez przewód z przewężeniem wynika, że na odcinku, na którym przekrój przewodu zmniejsza się, ciśnienie również maleje, osiągając najmniejszą wartość w minimalnym przekroju przewężenia. Gdy dobierze się odpowiednio prędkość przepływu oraz stosunek przekrojów zwężki, można wytworzyć w przewężeniu dowolne (ale wyższe od p_{cav})



Po połączeniu obszaru obniżonego ciśnienia z obszarem o ciśnieniu wyższym zaobserwujemy zjawisko zasysania płynu. Zjawisko to, zwane *efektem ssącego działania strugi*, jest podstawą działania *strumienic* (ejektorów), służących do wytwarzania podciśnienia w kondensatorach turbin, podnoszenia i przenoszenia cieczy, odwadniania szybów górniczych itp.



$$v_1 = v_2 \left(d/D\right)^2 = \beta^2 \, v_2$$

$$\beta = d/D$$

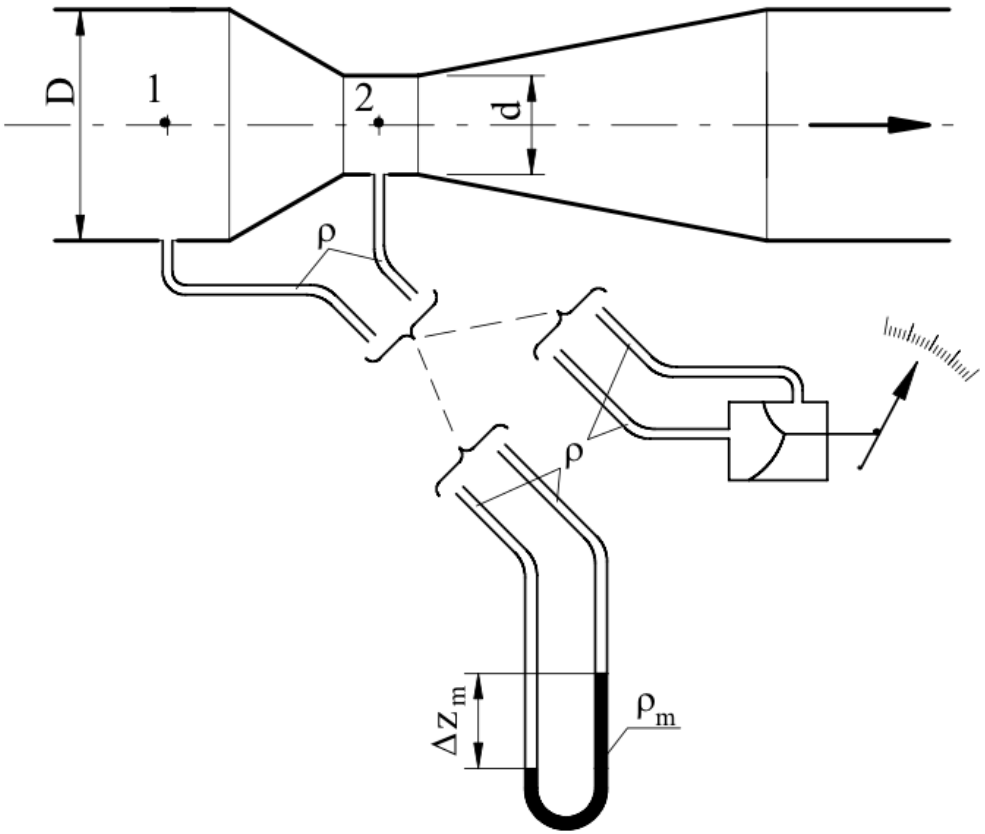
$$\frac{v_1^2}{2\,g} + \frac{p_1}{\rho\,g} = \frac{v_2^2}{2\,g} + \frac{p_2}{\rho\,g}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g}{1-\beta^4}} \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho\,g}}$$

$$q_V' = A_2 \, v_2 = \frac{\pi\, d^2}{4} \, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^4}} \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g}{1-\beta^4}} \sqrt{\Delta z \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right)}$$

$$q_m' = \rho\, A_2 \, v_2 = \frac{\pi\, d^2}{4} \, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^4}} \sqrt{2\,\Delta p\,\rho}$$



ε_1 Liczba ekspansji
(dla płynów ściśliwych)

$$C = C(\mathrm{Re}_D)$$

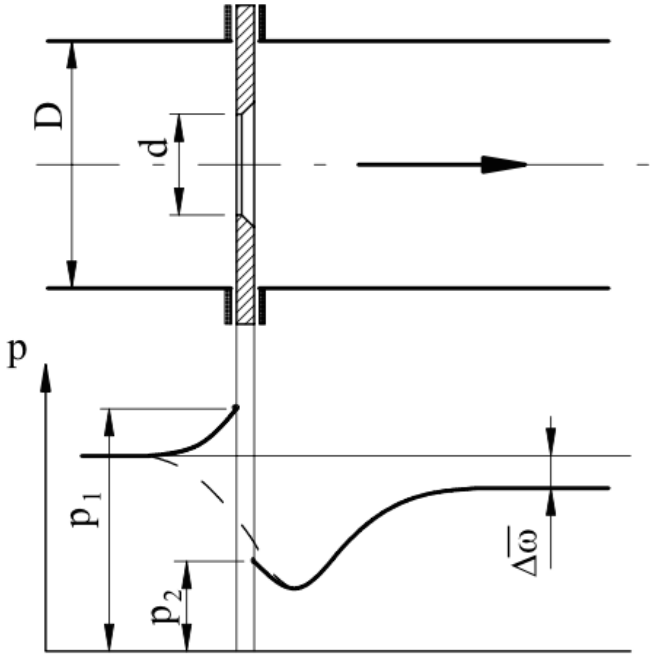
Uwzględnia straty

$$\mathrm{Re}_D = vD/\nu$$

dla cieczy $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

W praktyce są stosowane zwężki pomiarowe znormalizowane o kształtach i wymiarach określonych w PN-93/M-53950/01. Norma podaje tok obliczenia zwężek, określa warunki wbudowania, podaje wartości współczynników C i ε_1.

$$q_V = \varepsilon_1 \frac{C}{\sqrt{1-\beta^4}} \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho_1}},$$



Rozkład ciśnienia podczas przepływu przez rurę z kryzą pomiarową

ε_1 Liczba ekspansji (dla płynów ściśliwych)

$$C = C(\mathrm{Re}_D)$$

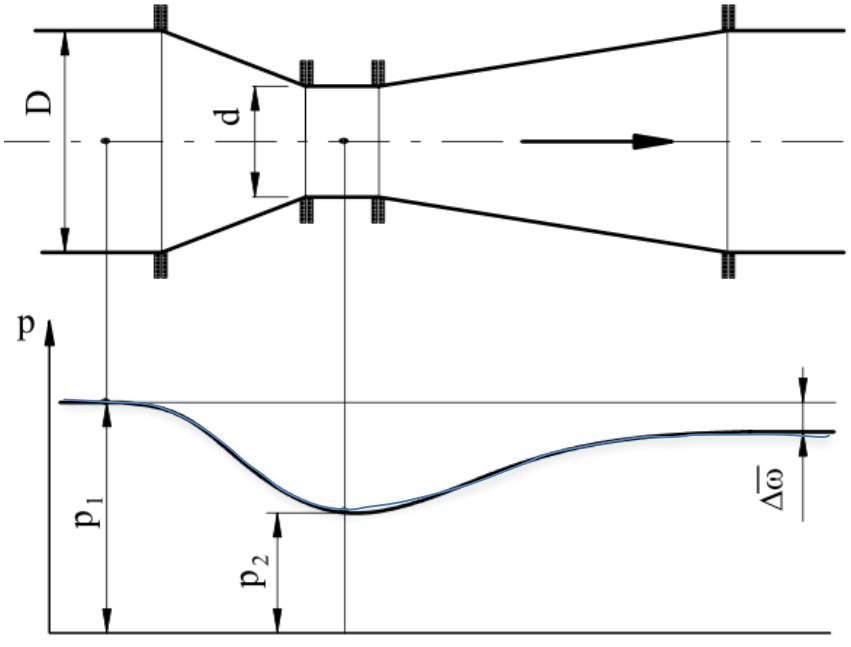
Uwzględnia straty

$$\mathrm{Re}_D = vD/\nu$$

dla cieczy $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

W praktyce są stosowane zwężki pomiarowe znormalizowane o kształtach i wymiarach określonych w PN-93/M-53950/01. Norma podaje tok obliczenia zwężek, określa warunki wbudowania, podaje wartości współczynników C i ε_1.

$$q_V = \varepsilon_1 \frac{C}{\sqrt{1-\beta^4}} \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho_1}},$$



Rozkład ciśnienia wzdłuż klasycznej zwężki Venturiego

ε_1 Liczba ekspansji
(dla płynów ściśliwych)

$$C = C(\mathrm{Re}_D)$$

Uwzględnia straty

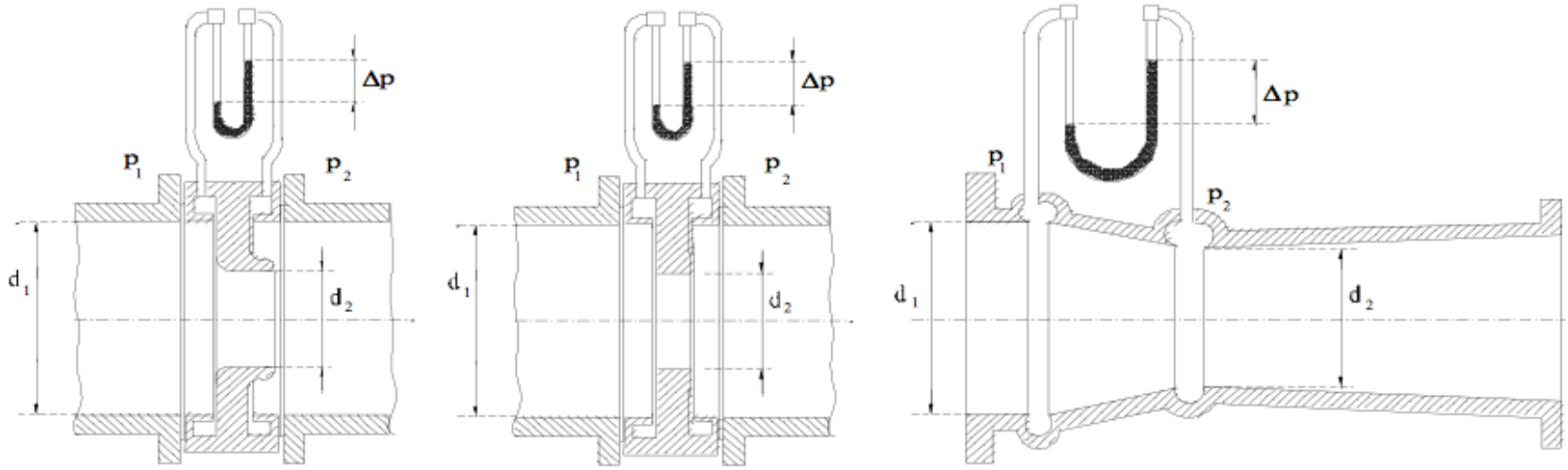
$$\mathrm{Re}_D = vD/\nu$$

dla cieczy $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

W praktyce są stosowane zwężki pomiarowe znormalizowane o kształtach i wymiarach określonych w PN-93/M-53950/01. Norma podaje tok obliczenia zwężek, określa warunki wbudowania, podaje wartości współczynników C i ε_1.

$$q_V = \varepsilon_1 \frac{C}{\sqrt{1-\beta^4}} \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho_1}},$$

a) b) c)



a) dysza pomiarowa b) kryza c) dysza Venturiego

Podczas obliczania wysokości strat hydraulicznych przez przewody o niekołowym przekroju korzysta się również z zależności (7.21) oraz z podanych wykresów, podstawiając $d = d_z$, gdzie d_z – nazwana *średnicą zastępczą* – jest poczwórną wartością stosunku przekroju przepływowego A do obwodu zwilżonego U, czyli $d_z = 4A/U$. Zależność (7.21) przyjmuje więc postać

$$\Delta h^{sl} = \lambda\left(\mathrm{Re}, \frac{k}{d_z}\right)\frac{l}{d_z}\frac{v^2}{2g}, \tag{7.33}$$

przy czym $\mathrm{Re} = v\, d_z/\nu$.